Arithmetisk Problem,

angaaende

Anvendelsen af de synkende Fonds.

Af

J. N. T.

I.

Problemen er følgende:

Forudsat, at en Commune eller en Stat har en fast indrettet Afbetalings Fond (Sinking fond, Caisse d'amortissement). Dette Ord: Afbetalings-Fond (synkende Fond), kan tages i Almindelighed for enhver Fond, udsat til med Tiden at betale nogen Gield efter en i Hensigt til Betalings-Størrelsen bestemt Regel. Men da denne Regel kan bestemmes paa mangfoldige Maader, saa vil jeg her kuns handle om de Fonds, som voxe i en geometrisk Forhold efter Rentefodens Størrelse. Den Summe, som er udsat aarlig til Afbetaling, kaldes det Aarlige (det første, eller det oprindelige Aarlige) af Fondet, Annuum. Det kan blive bestandig den samme Summe, det kan ogsaa forøges eller formindskes; jeg antager det at være en bestandig Størrelse.

Paa

Paa det at slig en Afbetalings-Fond kunde voxe efter Rentefodens Størrelse, maa ikke allene Renterne af Gielden betales foruden Fondet, men ogsaa naar Gielden bliver formindsket ved successive Afbetalinger, som skeer af Fondet, bør den sidste da ansees som en anden Creditor af Communen eller Staten, der gaaer i Steden for den som er afbetalt.

Sætter man dette Fond, som behøves til Gieldens Forrentning eller Rente-Fondet, ligeledes indrettet, saa kan den sidste forbindes med den Afbetalings Fond, naar de begge beholde den Størrelse, de havde i Begyndelsen; men saasnart dertil kommer en ny Gield, maa ogsaa Rente-Fondet blive forhøiet med de dertil svarende Renter; og beholde fra denne Tid alt hvad der er fastsat til Renterne indtil Gielden er gandske ophævet. Dette udkræves til Indretningen af saadan en synkende Fond, naar man ikke tilføier anden Bestemmelse, som hindre dens fri Tiltagelse.

Antages derimod at en Deel af Renterne, som svarer til den allerede afbetalte Gield, ikke skal betales i Fremtiden af Staten eller Communen, og derfor den synkende Fond skal anvendes deels til Gieldens Afbetaling, deels ogsaa for at lette den nuværende Byrde af Renten, saa følger, at den synkende Fond ikke voxer i en større Forhold end den, der oprinder af den Rest af Rente, som kommer Fondet tilgode af sine Betalinger.

Sættes end videre, at den gamle eller første Gields Masse bliver forhøiet med en ny Gield i den Tid, da den synkende Fond virker til sammes Formindskelse, saa kunde det maaskee blive endnu mere vanskeligt for Staten eller Communen, at tilveiebringe Renterne til den ny Gield og til den gamle. Saaledes kan man have desto større Aarsag til at undgaae en Deel af de til de betalte Gield svarende-Renter.

For at betragte Sagen saa almindelig, som behøves, paa det at samme paa de Tilfælde kunde anvendes, hvad enten der oprinder en ny Gield eller ikke, kan følgende Poster forudsættes som Problemens Bestemmelser:

1. Staten eller Communen, hvis synkende Fond er indrettet, skal have et aarligt Deficit i Indtægterne, saa at der udkræves et aarligt Laan, hvoraf da oprinder en nye Gield. Dette Deficit kan antages uforanderlig, og i en vis given Forhold til det Annuum af den synkende Fond. Man kan og sætte samme foranderlig, og i en vis Forhold til Tids Længden, hvori det

det vedbliver; men denne Forudsætning gier Problemens Opløsning ikkun noget mere indviklet, som ellers erholdes paa den samme Maade; derfor vil jeg forbigaae dette.

2. Da den ny Gield aarligen bør forrentes, saa sættes at en Deel af de dertil svarende Renter skal udredes af Statens eller Communens Casse, den anden Deel derimod optages som et nyt Laan og en ny Gield.

3. For at formindske den fra disse Grunde oprindende ny Gield, skal indrettes en Slags Hielpe-Fond af en Deel af Renterne, som den synkende Fond tilvinder sig af sine Betalinger.

Alt dette forudsat, spørges:

1. Om de Vilkaar, som maa antages, paa det at denne Hielpe-Fond, som hidrører af Renterne, som tages af den synkende Fond, kunde bringes til at standse Forøgelsen af den ny Gield? det er paa det at den ny Gield bliver et Maximum?

2. Om Tiden naar dette Maximum opnaaes?

3. Hvor stor samme bliver?

4. Og da den ny Gield, naar den engang er standset, igien formindskes af det stedse voxende Hielpe-Fond, og tilsidst gandske ophæves, saa spørges om den Tidspunkt, naar det skeer, eller naar den ny Gield er igien reducert til intet?

5. Og da den synkende Fond udi den samme Tid er gaaen frem ved den gamle Gields Formindskelse, saa kan man og vide Størrelsen af denne Formindskelse.

2.

Sæt nu engang for alle:

Det oprindelige Aarlige, som er udsat til Afbetalings-Fondet $= F$.

Det aarlige Deficit $= A = hf$, hvor h, er en bestemt og given Størrelse.

Den sædvanlige Rente-Fod $= r$.

Rente-Foden er den Forhold Capitalen $= 1$ med sin aarlige Rente har til Capitalen selv. Naar Renten af 1 er c, saa har man Exponenten af denne Forhold $= \overline{1 + c} : 1 = r$.

Saaledes er den aarlige Rente af Capitalen $1 = r \div 1$.

Rentefoden hvorefter den ny Gield aarlig voxer $= t$.

Den

Den Deel af Renten af Capitalen (1), som skal tages til Hielpe-Fondet $= \frac{r \div 1}{n}$, hvor (n) ligeledes er given og bestandig.

Rente-Foden, hvorefter det synkende Fond endnu tiltager, naar en Deel af dens Renter til Hielpe-Fondet bliver anvendt $= p$, og Renten efter denne Rente-Fod er $p \div 1$.

3.

Nogle Sætninger henhørende til Problemens Opløsning.

Rente-Foden (p), hvorefter den synkende Fond voxer, findes af den sædvanlige Rente-Fod (r) og den Deel af Renterne, som skal hver Gang fratages; man har $r \div p = \frac{r \div 1}{n}$; thi af Renten $r \div 1$ til Capitalen (1) skal fradrages $\frac{r \div 1}{n}$, saa har man Renterne, hvorved det synkende Fond forøges, derfor er $r \div 1 \div \frac{r \div 1}{n} = p \div 1$, altsaa $r \div p = \frac{r \div 1}{n}$ og $p = r \div \frac{r \div 1}{n}$.

4.

Da Rente-Foden, hvorefter den ny Gield tiltager, skal være $= t$, saa ere Renterne, som af Staten maae tilveiebringes paa en anden Maade for den Capital $= 1$, ogsaa $r \div t$. De sædvanlige Renter af (1) er $r \div 1$, deraf den Deel $t \div 1$, som bliver laant paa ny, og kommer til den ny Gield. Resten er $(r \div t)$, som skal afdrages. Sætter man $r \div t = \frac{r - 1}{m}$, saa er (m) en bestemt Størrelse.

5.

Fondet, hvis Annuum er F, og som tiltager i Forhold med Rente-Foden (r), bliver efter (x) Aar $= F(r + r^2 + r^3 + + + r^x) = \frac{r^x \div 1}{r \div 1} . r . F$, som er en bekiendt Sætning i Theorien af det voxende Fond.

Naar Rente-Fonden er p, saa er den samme efter (x) Aar $\frac{p^x \div 1}{p \div 1} . p . F$.

6.

Naar F er det oprindelige Annuum, saa er den derved afbetalte Summa efter (x) Aar den samme $\frac{r^x \div 1}{r \div 1} . r . F$.

Den Tidspunkt, da Summen den første Gang bliver anvendt til Betaling, er ogsaa Begyndelsen af dens Operationer.

Afbetalingen i Begyndelsen af det første Aar er $= F$.

Ved Slutningen af Aaret har Fondet ogsaa Renterne af denne betalte Summa, og kan igien beregne dem til Afbetaling; saa at Afbetalingen i Slutningen af det første Aar er $F + \overline{r \div 1} . F = Fr$; dette er Virkningen af F i det første Aar; den Betaling F er selv dens Virkning i Begyndelsen af Aaret, men ikke samme i et Aars Forløb. I Begyndelsen af det andet Aar betaler Fondet endnu (F), og ved Slutningen af dette Aar har den afbetalt $F + Fr + \overline{r - 1} . (F + Fr) = Fr + Fr^2$, og saaledes efter (x) Aar $F(r + r^2 + + r^x) = \frac{(r^x \div 1)}{r \div 1} . r$.

Anmerkning. Jeg veed, at andre og iblandt dem berømte Mænd give en anden Formel for Størrelsen af de betalte Summer; de sætte den lige stor med $\frac{r^x - 1}{r - 1} . F$. efter (x) Aar. Sagen kan forestilles paa følgende Maade.

I det første Aar bliver betalt F, i det andet Aar $F + \overline{r \div 1} . F = rF$, i det tredie $F + \overline{r \div 1} . \overline{F + Fr} = Fr^2$ og saa videre, i det xde Aar $Fr^{x \div 1}$. Derfor betales i (x) Aar $F(1 + r + r^2 + + r^{x \div 1}) = F . \frac{r^x \div 1}{r \div 1}$. I Mathematiken kan man altid let komme ud af slige Differencer naar man vil; men det er klart, at man i den sidste Formel sætter Betalings-Terminen til Slutningen af Aaret, i den første derimod i Begyndelsen af samme, som synes mig at være mere naturlig, da Operations-Tiden saaledes beregnes fra Betalingens Begyndelse, det er Virkningens Tid begynder fra den Tid, da Aarsagen begynder at virke.

Sættes at det Aarlige af Fondet F oprinder successiv i smaa Portioner, saa at enhver Portion strax anvendes til Betalingen, og fra den Tidspunkt af bærer Renter, saa kan Fondets Virkning ansees som en successiv oprindende Summa end som et continuum; da kan den beregnes som et Area curvæ, hvis Abscisser (x) udtrykker Tidens Længe og Ordinater y ere $= F . r^x$. I dette Tilfælde er $Sydx = \int Fr^x dx = \frac{r^x . F}{\text{Log. } r} + C$, og da dette Areal skal være

$= 0$

$= 0$ naar $x = 0$, saa bliver $C = \frac{\div F}{\text{Log. } r}$ og $\int ydx = F \cdot \frac{(r^x \div 1)}{\text{Log. } r}$. Denne Qvantitet er altid større end $F\left(\frac{r^x \div 1}{r \div 1}\right)$ eftersom log. nat. $r < r \div 1$, derimod er samme mindre end $F \cdot \frac{(r^x - 1)\,r}{r - 1} = F \cdot \frac{(r^x - 1)}{r - 1 : r} = F \cdot \frac{r^x - 1}{r - \frac{1}{r}}$, fordi log. nat. r som Divisor er større end $\frac{r - 1}{r}$, hvilket i alt stemmer overeens med Sagens Natur.

7.

. F. engang udsat som en Capital voxer i (x) Aar med sine Renter og Rentes Renter til $F \cdot r^x$., Beløbet af F aarlig efter (x) Aar er derfor i Forhold til F engang som $\frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot r : r^x = \frac{r}{r - 1}\left(1 \div \frac{1}{r^x}\right) : 1$, og efter en meget lang Tid, naar x kan sættes $= \infty$, og $\frac{1}{r^x} = 0$, bliver denne Forhold $\frac{r}{r - 1} : 1$.

Naar Renten er 4 Procent, er $\frac{1}{r - 1} = 25$. Det er den Grund-Capital (perpetuitis) hvis Rente er 1. og $r = 1,04$, derfor $\frac{r}{r - 1} : 1 = 26 : 1$. Ligeledes er efter den 2 Procent-Fod $r = 1.02$ og $\frac{r}{r - 1} : 1 = 51 : 1$. Efter den 3 Procent-Fod er $r = 1.03$ og $\frac{r}{r - 1} = 34\frac{1}{3}$, og naar regnes 5 Procent er $r = 1.05$ og $\frac{r}{r - 1} = 21$.

Grændserne for Forholden mellem Beløbet af en aarlig Fond, og den samme engang udsat, bliver derfor saa stor som den Grund-Capital naar Uniteten adderes. Til disse Grændser nærmer sig den Forhold med Tidens Længde. I kortere Tider bliver Forholden mindre. Sættes $r = 1.04$ naar $r^x = 2$, hvortil den voxer næsten i 18 Aar, saa bliver Forholden $= 13 : 1$.

Denne Forhold bliver efter en uendelig lang Tid mindre, naar Procenten og følgeligen Rente-Foden (r) er større; thi $\frac{r}{r - 1}$ nærmer sig til en Unitet, naar (r) er et større Tal. Den sidste findes ligeledes ved den samme Forhold, omendskiønt x ikke er uendelig; thi betragter man (r) som en foranderlig, og x som en bestemt Størrelse $= m$, saa er Forholden $\frac{r}{r - 1} \cdot \left(1 \div \frac{r}{r^m}\right) : 1$

$= \frac{r \div r^{1 \div m}}{r \div 1}$; deraf er Differentialen $\frac{(r \div 1)\,dr \div r\,dr}{(r-1)^2} \div \frac{(1 \div m)(r-1) \,.\, r^{-m} \,.\, dr}{(r-1)^2}$ $+ \frac{r^{1 \div m}}{(r \div 1)^2} \,.\, dr = \div \frac{dr}{(r-1)^2} \div \frac{((1 \div m)(r-1) + r)\, r^{-m}}{(r-1)^2} \,.\, dr = \frac{dr}{(r-1)^2 \,.\, r^m}$ $(rm + 1 \div 2r \div m \div r^m)$. Sættes $r - 1 = v$ og $r = v + 1$, saa bliver Factoren, som staaer i den Parenthese $(v+1)m + 1 \div 2v \div 2 \div m \div (v+1)^m$ $= mv \div 2v \div 1 \div (1+v)^m = \div 2v \div 1 + mv \div (1 + mv + +)$ en negativ Størrelse, naar dr er posetiv. Det vil sige, naar Procenten og Rente-Foden antages større, saa bliver den søgte Forhold desaarsag mindre, da denne sidste Forandring bliver et Decrement, naar Rente-Fodens Forandring dr bliver et Increment.

Naar $r = 1$, det er, naar Pengene bærer ikke nogen Rente, bliver $F(r + r^2 + + r^x) = xF$, og denne Forhold $x : 1$ et Maximum. Dette findes umiddelbar som en Følge af Sagens Natur. Men den samme har man ved Differentiationen anvendt paa det Tilfælde, hvori $\frac{r^{x+1} - 1}{r - 1} = \frac{0}{0}$ en ubestemt Størrelse naar $r = 1$.

I slig Tilfælde maae man, som bekiendt, differentiere Tælleren og Nævneren hver for sig, saaledes faaer man $\frac{dr \div (1 \div x) \,.\, r^{-x}\, dr}{dr} = \frac{1 \div (1 \div x)\, r^{-x}}{1}$ det er $= x$ naar for (r) omsættes 1. Saaledes har man den geometriske Forhold mellem den aarlig F og F engang, men Differencen af begge eller den arithmetiske Forhold bliver altid større, naar (r) voxer; thi denne Defference har man i $F(r + r^2 + + r^x) \div Fr^x = F(r + r^2 + + r^{x-1})$, som bliver altid større med r.

8.

Sættes at Fondets Annuum F tiltager i den samme Forhold med Tiden, f. Ex. lad det være i det første Aar F, i det andet Aar 2F, og saa videre, i det xde Aar xF, saa er Beløbet efter x Aar ligestor med $F(r^x + 2r^{x-1} + + xr) = Fr^{x+1}\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{3}{r^3} + + \frac{x}{r^x}\right) = F \,.\, \frac{r}{r-1}$ $\left(r \,.\, \frac{r^x - 1}{r-1} \div x\right)$. Dette Beløb forholder sig til Beløbet af F aarlig, det er

til

til $\frac{r.(r^x-1)}{r \div 1}$. F, som $\frac{r}{r-1} \div \frac{x}{r^x-1} : 1$. og denne Forhold nærmer sig til $\frac{r}{r \div 1}$, naar Tiden bliver længere, og forvandles dertil, naar $x = \infty$, thi naar $x = \infty$, er ogsaa $\frac{x}{r^x-1} = 0$.

9.

Naar det Annuum F aftager i Forhold med Tiden, saaledes, at for F i det xde Aar det Aarlige er kun $\frac{F}{x}$; sættes da $\frac{F}{x} = M$, har man for Beløbet efter (x) Aar $M\,(xr^x + (x \div 1)\,.\,r^{x-1} + + r) = M\left(\frac{r^x-1}{r-1}\,.\,r + \frac{r^x-r}{r-1}\,.\,r + \frac{r^x \div r^2}{r-1}\,.\,r + + + \frac{r^x - r^{x-1}}{r-1}\,.\,r\right) = M\left(x\,.\,\frac{r^{x+1}}{r-1} \div \frac{r^x-1}{(r-1)^2}\,r\right) = M\,.\,\frac{r}{r-1}\,.\left(x\,.\,r^x + \frac{r^x-1}{r-1}\right)$.

10.

En almindelig Formel for den ny Gields Størrelse, som oprinder efter Problemens Betingelser.

Til Problemens Opløsning udfordres, som en Hovedsag, en almindelig Formel for den ny Gields Størrelse, som oprinder i en Række af Aarene x, efter de Betingelser, som forhen ere antagne. Denne findes saaledes:

Det aarlige Deficit, som paa ny skulde laanes, er i Begyndelsen af det første Aar A, og i Slutningen af Aaret, med Renterne deraf, A . t, da den ny Gield voxer efter Rente-Foden t. Men herfra afgaaer $\frac{1}{n}$ den Deel af Renterne, som i samme Tid falder af de af den synkende Fond betalte Summer. Denne Deel er ved Slutningen af det første Aar $\frac{r \div 1}{n}$ F, derfor er den ny Gield ved Slutningen af det første Aar $At \div \frac{r-1}{n}$. F. Dertil er kommen ved Slutningen af det andet Aar (a) Renterne af den forrige Gield og (b) det Deficit med sine Renter for et Aar, saa at Gielden nu er voxen til $At + \left(At \div \frac{r-1}{n} F\right) t$. Derimod bliver samme formindsket i det andet Aar ved Hielpe-Fondet med $\frac{r-1}{n}$. F (1 + p), thi Fondet F har allerede afbetalt i Begyndelsen af det andet Aar $F + Fp$ (da p er Rente-Foden, hvorefter F med dets øvrige Renter tiltager). De sædvanlige Renter af denne Summe $F(1 + p)$ ere $(r \div 1) \,.\, F(1 + p)$, og Hielpe-Fondet udreder altsaa $\left(\frac{r-1}{n}\right) F \,.\, (1 + p)$ til Gieldens Formindskelse; følgeligen bliver den ny Gield ved Slutningen af det andet Aar $= At + \left(At \div \frac{r-1}{n} \,.\, F\right) t \div \left(\frac{r-1}{n}\right) . F . (1 + p) = At + At^2 \div \frac{r-1}{n} . Ft \div \frac{r-1}{n} . F(1 + p)$. Gaaer man nu frem med den samme Beregnings-Maade, saa har man ved Slutningen af det tredie Aar den ny Gields Tiltagelse ved Deficit for dette Aar, og Renterne til samme, tilligemed forrige Gield $= At + At^2 + At^3 \div \frac{r-1}{n} . Ft^2 \div \frac{r-1}{n} . F(1 + p)$. Formindskelsen derimod er $\left(\frac{r-1}{n}\right) F(1 + p + p^2)$; derfor bliver Størrelsen af den nyere Gield ved det tredie Aars Slutning $= At + At^2 + At^3 \div \frac{r-1}{n} . Ft^2 \div \frac{r-1}{n} . F(1 + p)t \div \frac{r-1}{n} . F(1 + p + p^2)$. Saaledes seer man, at den ny Gield S ved Slutningen af det $x$de Aar maae være $S = A(t + t^2 + + t^x) \div \frac{r-1}{n} . F(t^{x-1} + \overline{1 + p} . t^{x-2} + \overline{1 + p + p^2} . t^{x-3} + + + \overline{1 + p + p^2 + + + p^{x-1}})$, og naar nu sættes $F = \frac{A}{h}$, saa er $S = A(t + t^2 + + + t^x) \div \frac{r \div 1}{nh} . A(t^{x-1} + \overline{1 + p} . t^{x-2} + \overline{1 + p + p^2} . t^{x-3} + + + \overline{1 + p + p^2 + + p^{x-2}})$.

II.

Denne Formel forandres derved, at $t^{x \div 1} + \overline{1 + p} . t^{x \div 2} + \overline{1 + p + p^2} . t^{x \div 3} + + + \overline{1 + p + p^2 + + p^{x \div 1}} = \frac{1}{t \div p} . (1 + t + t^2 + + t^x \div \overline{1 + p + p^2 + p^x}) = \frac{1}{t \div p} . (t + t^2 + + t^x \div \overline{p + p^2 + + p^x}) = \frac{1}{t \div p} . \left(t . \frac{t^x - 1}{t - 1} \div p . \frac{p^x - 1}{p \div 1}\right)$. Denne Forandring sees deraf, at Leddene af den første Række ere Produkter af terminis Summatoriis for den geometriske Række $1 + p + p^2 + + + p^{x-1}$, enhver deraf multipliceret med Ledden af en geometrisk Række $1, t, t^2 \ldots t^{x-1}$, naar de sidste sættes i den omvendte Orden t^{x-1},

$t^{x-1}, t^{x-2}, t^{x-3} \ldots 1$, derfor bliver det almindelig Led (terminus generalis) af den søgte Række, som kan sættes: $T, = (1 + p + p^2 + + p^{n-1})\, t^{x \div n}$ $= t^{x \div n} \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} = \frac{t^x}{p - 1} \cdot \left(\frac{p^n}{t^n} \div \frac{1}{t^n}\right)$, naar (n) er Ordens-Tallet (numerus termini). Derfor findes Summen af den Række for (x) Led $=$

$$\frac{t^x}{p \div 1} \cdot \left(\frac{p}{t} + \frac{p^2}{t^2} + + + \frac{p^x}{t^x}\right) \div \frac{t^x}{p - 1} \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} + + \frac{1}{t^p}\right) =$$

$$\frac{t^x}{p \div 1} \cdot \left(\frac{p^x}{t^x} \div 1\right) \frac{p}{t} : \left(\frac{p}{t} \div 1\right) \div \frac{t^x}{p \div 1} \cdot \left(\frac{1}{t^x} - 1\right) \cdot \frac{1}{t} : \left(\frac{1}{t} \div 1\right) =$$

$$\frac{1}{p \div 1} \cdot \left(p \cdot \left(\frac{p^x \div t^x}{p \div t}\right) \div \frac{1 - t^x}{1 - t}\right) = \frac{1}{p \div 1} \cdot \frac{1}{p \div t} \cdot \left(\overline{1 \div t} \cdot p^{x+1} + \overline{p \div 1} \cdot t^{x+1}\right)$$

$= \frac{1}{p \div t} \cdot \left(\frac{p^{x+1}}{p \div 1} + \frac{t^{x+1}}{1 \div t} \div \frac{p \div t}{(p \div 1) \cdot (p - t)}\right)$. Men nu er $\frac{p \div t}{(p - 1) \cdot (p - t)} =$ $\frac{1}{p \div 1} + \frac{1}{1 \div t}$, derfor har man Summen $= \frac{1}{p \div t}\left(\frac{p^{x+1} \div 1}{p \div 1} + \frac{t^{x+1} - 1}{1 \div t}\right) =$ $\frac{1}{p \div t}\left(\frac{p^{x+1} - 1}{p - 1} \div \frac{t^{x+1} - 1}{t - 1}\right) = \frac{1}{p \div t}\left((1 + p + p^2 + + p^x) \div (1 + t + t^2 + + t^x)\right)$ $= \frac{1}{p - t}\left(p + p^2 + + p^x \div \overline{t + t^2 + + t^x}\right) = \frac{1}{p - t} \cdot \left(\frac{p^x - 1}{p \div 1} \cdot p \div \frac{t^x - 1}{t - 1} \cdot t\right) =$ $\frac{1}{t \div p}\left(\frac{t^x - 1}{t - 1} \cdot t \cdot \div \frac{p^x - 1}{p \div 1} \cdot p\right)$. Deraf bliver Summen af den ny Gield efter (x) Aar $S = A\left(\frac{t^x - 1}{t \div 1} \cdot t \div \frac{r - 1}{n \cdot h} \cdot \frac{1}{t \div p}\left(\frac{t^x - 1}{t \div 1} \cdot t \div \frac{p^x - 1}{p - 1} \cdot p\right)\right)$ og da $\frac{r - 1}{n}$ $= r \div p$, (3), saa bliver $S = A\left(\frac{t^x - 1}{t - 1} \cdot t \div \frac{r - p}{t \div p} \cdot \frac{1}{h}\left(\frac{t^x - 1}{t \div 1} \cdot t \div \frac{p^x - 1}{p - 1} \cdot p\right)\right)$.

12.

Men denne sidste almindelige Formel, omendskiønt den giver den sande Værdie i hvert Tilfælde, giver dog ikke den bestemte Værdie, som søges. Udi alle de Tilfælde, hvori $t = p$, eller naar $t = 1$, eller $p = 1$, eller $A = 0$, har man en Deel af den Formel $= \frac{0}{0}$, hvilken efter Calculens Grundsætning ikke er falsk, men ubestemt, saa at den søgte Værdie deraf ikke giøres kiendelig nok. Man veed i Analysis, at man i slige Tilfælde maae gaae tilbage til det første Grund-Udtryk, hvoraf den ubestemte Formel følger; og naar man ikke vilde gaae dertil, maatte for disse Tilfælde søges andre dertil passende Ligninger.

Naar

Naar $t = p$ bliver den sidste Deel af S, den Udtryk $\frac{r \div p}{t \div p} \cdot \frac{1}{h} \left(\frac{t^x - 1}{t \div 1} \cdot t \div \frac{p^x - 1}{p \div 1} \cdot p \right) = \frac{0}{0}$. Gaar man tilbage til den første Ligning (No. 11), saa sees, at naar $t = p$, saa er $t^{x-1} + \overline{1 + p} \cdot t^{x-2} + \overline{1 + p + p^2} \cdot t^{x \div 3} + + \overline{1 + p + p^2 + + p^{x-1}} = t^{x-1} + \overline{1 + t} \cdot t^{x \div 2} + \overline{1 + t + t^2} \cdot t^{x-3} + + \overline{1 + t + t^2 + + t^{x-1}} = t^{x \div 1} \cdot \frac{t-1}{t-1} + t^{x \div 2} \cdot \frac{t^2 - 1}{t-1} + t^{x \div 3} \cdot \frac{t^3 - 1}{t-1} + + t^{x \div x} \cdot \frac{t^x - 1}{t-1} = x \frac{t^x}{t \div 1} \div \frac{1}{t \div 1} \cdot (t^{x-1} + t^{x-2} + + t^{x \div x}) = \frac{1}{t \div 1} \cdot \left(xt^x \div \frac{t^x - 1}{t \div 1} \right)$.

Det samme følger ogsaa deraf, at den første Række bliver $= 1 + 2t + 3t^2 + + pt^{x-1}$, og naar denne summeres efter (No. 9), saa faaer man $\frac{1}{t \div 1} \left(xt^x \div \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \right)$.

Ligeledes udfindes det ogsaa ved Anvendelsen af den bekiendte Methode: at differentiere udi Størrelsen $\frac{0}{0}$ Tæller og Nævner hver for sig. Man har da efter (No. 11) $\frac{\overline{t + t^2 + + t^x \div p + p^2 + + p^x}}{t \div p}$; lader man nu (t) være foranderlig, da p antages som bestandig, saa giver denne Differentiation $\frac{(1 + 2t + 3t^2 + + xt^{x-1})\, dt}{dt} = 1 + 2t + 3t^2 + + pt^{x-1}$ ligesom forhen. Tages $\frac{1}{t \div p} \left(t \frac{t^x - 1}{t \div 1} \div p \cdot \frac{p^x - 1}{p \div 1} \right)$, saa giver Differentiationen, for (t) foranderlig og (p) bestandig, det Udtryk $d \cdot \left(t \cdot \frac{t^x - 1}{t \div 1} \right) : d(t \div p) = \left[\frac{(x + 1)\, t^x \div 1}{t \div 1} \div t \cdot \frac{t^x \div 1}{(t \div 1)^2} \right] dt : dt\, \frac{1}{t \div 1} \left(xt^x \div \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \right)$.

13.

Naar $t = 1$, det er, naar den ny Gield voxer kun i Forhold med Tiden, men uden Renter, saa bliver $t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} = \frac{0}{0}$. Udi dette Tilfælde har man $A(t + t^2 + + t^x) = xA$ og $t^{x-1} + \overline{1 + p} \cdot t^{x-2} + \overline{1 + p + p^2} \cdot t^{x \div 3}$ $+ +$

$+ + 1 + p + p^2 + + p^{x-1} = 1 + \overline{1+p} + \overline{1+p+p^2} + +$
$\overline{1+p+p^2 + + p^{x-1}} = x + \overline{x \div 1}\,.\,p + \overline{x \div 2}\,.\,p^2 + + p^{x \div 1} =$
$\frac{x\,.\,p + \overline{x \div 1}\,.\,p^2 + + p^x}{p} = \frac{1}{p \div 1}\left(p\,.\,\frac{p^x \div 1}{p \div 1} \div x\right)$ efter (No. 8).

End videre naar $p = 1$ bliver $p\,\frac{p^x \div 1}{p \div 1} = \frac{0}{0}$. Dette skeer, naar alle de Renter, som tilfalde de synkende Fond, afgives til Hielpe-Fondet, saa at den første slet intet forøges ved sine Renter. Verdien af $t^{x-1} + \overline{1+p}\,.\,t^{x-2}$ $+ + + 1 + p + p^2 + + p^{x \div 1}$ bliver saaledes $t^{x \div 1} + 2t^{x \div 2} + 3t^{x \div 3} + + x$ $= \frac{t^x + 2t^{x-1} + 3t^{x-2} + + + pt}{t} = \frac{1}{t \div 1}\,.\left(t\,.\,\frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div x\right)$ efter (No. 8). Samme Udslag følger ogsaa af den forhen berørte Differentiation.

14.

Sættes end videre $A = 0$, saa er og $h = 0$, da $hF = A$. I det Tilfælde oprinder ikke nogen ny Gield, men de af de synkende Fonds oppebaarne Renter blive samlede til et nyt Activ (activum), og S eller den ny Gields Summe (i No. 10) bliver negativ. Gaaer man tilbage til den almindelige Formel i No. 10, saa er $A\,(t + t^2 + + t^x) = 0$; og $\div S = S^1 =$ $\frac{r \div 1}{n}\,.\,F\,.\,(t^{x \div 1} + \overline{1+p}\,.\,t^{x \div 2} + + + 1 + p + p + + p^{x \div 1})$, og t er Rente-Foden for de henlagte Rente-Summer.

Størrelsen r og p bestemmes den ene af den anden. Da $r \div p =$ $\frac{r \div 1}{n}$, men t er en særskildt Qvantitet for sig selv. Naar derfor $t = 1$, det er, naar de samlede Renter, som ere fratagne fra det synkende Fond, ikke voxe ved Rentes Rente, saa bliver $S = \frac{r \div 1}{n}\,.\,\frac{1}{p \div 1}\,.\left(p\,\frac{p^x \div 1}{p \div 1} \div x\right)$.

Dersom, for $A = 0$, de af den synkende Fond tagne Renter voxe efter den sædvanlige Rente-Fod, saa er $t = r$, og man har $S^1 =$ $\frac{r-1}{n}\,.\,\frac{r \div p}{1}\,.\,F\left(r\,.\,\frac{r^x \div 1}{r-1} \div p\,.\,\frac{p^x - 1}{p-1}\right) = \frac{r-p}{r-p}\,.\,F\left(r\,.\,\frac{r^x - 1}{r-1} \div p\,.\,\frac{p^x - 1}{p-1}\right) =$ $F\,.\left(r\,.\,\frac{r^x - 1}{r-1} \div p\,.\,\frac{p^x - 1}{p-1}\right)$. Lægges nu dertil $F\,.\,(p + p^2 + + p^x) =$

$F \,.\, p \,.\, \frac{p^x - 1}{p - 1}$, saa har man $F \,.\, r \,.\, \frac{r^x - 1}{r - 1} = F(r + r^2 + + r^x)$; det er, naar den Deel af Renter, som ere tagne fra de synkende Fonds, voxe for sig efter den samme Rente=Fod, hvorefter Fondet selv haver voxet ved sine fulde Renter, saa bliver Beløbet af de fratagne Renter ligesaa stor, som den Formindskelse Fondet haver lidt ved den Fratagelse.

15.

Den første Grundligning i No. 10. giver $S = A\,(t + t^2 + + t^x) \div \frac{r \div 1}{n} \,.\, F\,(t^{x \div 1} + \overline{1 + p} \,.\, t^{x \div 2} + + (1 + p + p^2 + + p^{x-1}))$.
Denne forandres til den almindelige (i No. 11).

1) $S = A\left(\frac{t^x - 1}{t - 1} \,.\, t \div \frac{r \div p}{t \div p}\left(\frac{1}{h} \,.\, \frac{t^x \div 1}{t - 1} \,.\, t \div p \,.\, \frac{p^x \div 1}{p \div 1}\right)\right)$.

2) Naar $t = p$, bliver efter No. 12 $S = A \,.\, \left(t \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div \frac{r \div p}{t \div 1} \,.\, \frac{r}{h} \,.\, \left(xt^x \div \frac{t^x \div 1}{t \div 1}\right)\right)$.

3) Naar $t = 1$, bliver efter (No. 13) $S = A\left(x \div \frac{r \div p}{p \div 1} \,.\, \frac{1}{h} \,.\, \left(p \,.\, \frac{p^x \div 1}{p \div 1} \div x\right)\right)$.

4) Naar $p = 1$, saa er $S = A\left(t \,.\, \frac{t^x - 1}{t - 1} \div \frac{r - 1}{h} \,.\, \frac{1}{t - 1}\left(t \,.\, \frac{t^x \div 1}{t - 1} - x\right)\right)$.

5) Naar $t = 1$ og ligeledes $p = 1$, saa bliver $S = Ax \div \frac{r - 1}{n} \,.\, \frac{1}{h} \,.\, A\,(1 + 2 + + x)$ efter No. 10 $= A\left(x \div \frac{r - 1}{n.h} \,.\, \frac{\overline{p + 1}}{2} \,.\, x\right)$.

6) Naar $A = 0$, saa er efter No. 14 $S^1 = \frac{r \div 1}{t \div p} \,.\, \frac{1}{h} \,.\, F \,.\, \left(t \,.\, \frac{t^x - 1}{t - 1} \div p \,.\, \frac{p^x - 1}{p \div 1}\right)$.

16.

Betingelserne, hvorunder den ny Gield bliver et Maximum.

De Bestemmelser, som udkræves for at den ny Gield S skal blive et Maximum, og at den derfor igien kunde blive ophævet, findes saaledes: Man

Man har $S = A\left(t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div \frac{r \div p}{t \div p} \cdot \frac{1}{h}\left(t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div p \cdot \frac{p^x \div 1}{p \div 1}\right)\right)$. Naar det skal være $= 0$, saa maae man og befinde $\left(1 \div \frac{r \div p}{t \div p} \cdot \frac{1}{h}\right) t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} + \frac{r \div p}{t \div p} \cdot \frac{1}{h} \cdot p \, \frac{p^x \div 1}{p \div 1} = 0$; og naar sættes $\frac{r \div p}{h} = m = \frac{r - 1}{n \cdot h}$, saa har man $\left(1 \div \frac{m}{t \div p}\right) \cdot t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} + \frac{m}{t \div p} \cdot p \cdot \frac{p^x \div 1}{p \div 1} = 0$. Tallene t, p, r ere hver især større end en Unitet. Nu kan S blive $= 0$,

1) Naar $p > t$. Man har da $\left(1 + \frac{m}{p \div t}\right) t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div \frac{m}{p \div t} \cdot p \cdot \frac{p^x \div 1}{p \div 1}$, som kan blive til Nul, og derefter negativ, og som derfor nødvendig maae have været et Maximum. Det er og for sig selv klart; thi naar p er større end t, saa voxer Hielpe-Fondet i en større geometrisk Forhold end den ny Gield. Enhver endelig Qvantitet, i hvor liden den end er, naar den voxer efter en større geometrisk Forhold end den anden, maae med Tiden overgaae den anden, uagtet den sidste i Begyndelsen har været meget større.

2) Sæt at $t = m + q = \frac{r - 1}{nh} + q$, saa er q Exponenten af Forholden, hvorefter den ny Gield (A) voxer i det første Aar, naar Rente-Foden er t, og naar fra At afdrages det Tilskud, som skeer for Gieldens Formindskelse af Hielpe-Fondet; thi efter No. 10 bliver den ny Gield i Udgangen af første Aar $= At \div \frac{r \div 1}{n} \cdot F = A\left(t \div \frac{r \div 1}{nh}\right) = Aq$. Naar Størrelsen q sættes i den almindelige Ligning for (S), saa bliver $S = A\left[\left(1 \div \frac{t \div q}{t \div p}\right) \cdot t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div \frac{(t \div q)}{t \div p} \cdot p \cdot \frac{(p^x \div 1)}{p \div 1}\right] = A\left[(q \div p) \cdot t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} + \frac{t \div q}{t \div p} \cdot p \cdot \frac{p^x \div 1}{p \div 1}\right]$. Denne Funktion kan være $= 0$, ikke allene naar $p > t$ som forhen, men ogsaa naar kun $p > q$, omendskiønt $p < t$; derimod naar p (mindre end t) $= q$, saa sees strax, at den Formel for S giver en positiv Størrelse, hvor stor eller liden man end antager x. Naar $p < q$, saa følger endnu det samme. Deraf sluttes, at man har Prøve paa Muligheden om et Maximum kan opnaaes eller ikke. Det kommer an paa den Størrelse p, hvorpaa Hielpe-Fondets Størrelse beroer. Saa længe $p > q$ eller $p > \left(t \div \frac{r \div 1}{nh}\right)$, maae et Maximum

mum have Sted, men naar $p = \left(t \div \frac{r \div 1}{nh}\right)$, og endnu mere naar $p < q$, saa voxer Gielden in infinitum. Der behøvedes altsaa kun at søge Forholden, hvorefter den ny Gield tiltager i det første Aar, $q = t \div \frac{r \div 1}{nh} = t \div \frac{r \div p}{h}$. Naar denne Forhold er ligesaa stor eller større end Forholden p, hvorefter den synkende Fond fremvoxer, saa maae ogsaa den ny Gield med Tiden stedse blive større, uden at engang kunde standses af det dertil bestemte Hielpe-Fond; derimod naar den sidste Forhold (p) er større end (q), hvorefter den ny Gield voxer i det første Aar, saa naaer Gielden sit Maximum, bliver da standset, og derefter ganske ophæves. Da $q = t \div m$, og det beroer derpaa, om $p > t \div m$, saa kan man ogsaa sige, at det beroer derpaa, om $t < m + p$. Men $m = \frac{r \div 1}{n \cdot h} = \frac{r \div p}{h}$; følgeligen kan man undersøge, om $t < \frac{r \div p}{h} + p$, det er $t < \frac{r + \overline{h \div 1} \cdot p}{h}$.

For Exempel: Sæt at $h = 1$ eller $F = A$, det oprindelige Aarlige af det synkende Fond, saa stor som det aarlige Deficit, saa maae Rente-Foden (t) blive mindre end $r \div p + p$, altsaa mindre end r; derfor opnaaer den ny Gield sit høieste Maal, naar den voxer efter en mindre Forhold end den sædvanlige Rente-Fod. Naar $h = 2$, saa maae (t) være mindre end $\frac{r + p}{2}$. Udi Størelsen $\frac{r \div 1}{n}$ kan (n) ikke blive mindre end (1). Naar $n = 2$, saa er $r \div p = \frac{r \div 1}{2}$, og da $r = 1.04$, saa bliver $r \div p = 0.02$, og $p = 1.02$. Udi dette Tilfælde maae ogsaa (t) være $< \frac{2.06}{2}$, eller < 1.03; det er, naar $h = 1$, eller Deficit A dobbelt saa stor som F for det synkende Fond, saa maae den ny Gield ikke voxe efter 3 Procent Rente-Fod.

17.

Sættes $q = 0$, og derfor $t \div m = q = 0$, hvoraf $t = m = \frac{r \div 1}{nh}$, saa udfordres, at (h) bliver meget mindre end en Unitet; thi i det mindste er $t = 1$, og da $\frac{r \div 1}{n} = \frac{0{,}04}{n}$, saa maae (h) være en egentlig Brøk, paa det at $\frac{r \div 1}{n} \cdot \frac{1}{h}$ skal kunde blive $= t$. I dette Tilfælde sættes (t) isteden for $\frac{r \div 1}{nh}$

udi

udi den almindelige Formel, og man har $S = A\left(1 \div \frac{t \div q}{t \div p} . t . \frac{t^x \div 1}{t \div 1} + \frac{t \div q}{t \div p} . p . \frac{p^x \div 1}{p \div 1}\right) = A\left(\div \frac{tp}{t \div p} . t . \frac{t^x \div 1}{t \div 1} + \frac{t . p}{t \div p} . p \frac{p^x \div 1}{p \div 1}\right)$. Denne Udtryk for (S) giver en negativ Størrelse, naar $t > p$, da $\frac{t^x \div 1}{t \div 1}$ er større end $\frac{p^x - 1}{p \div 1}$; endogsaa i det Tilfælde, da $p > t$ giver den samme Formel S negativ; thi da bliver $S = \frac{pt}{p \div t} . t . \frac{t^x - 1}{t - 1} \div \frac{tp}{p \div t} . p . \frac{p^x \div 1}{p \div 1} = \frac{pt}{p \div t}\left(t . \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div p . \frac{p^x - 1}{p - 1}\right)$. Naar det aarlige Fond (F) er saa stor, at kun en Deel af Renterne $\frac{r - 1}{n} . F$ ved Slutningen af det første Aar allerede er tilstrækkelig til at kunde ophæve det Deficit A med dets Renter, eller At, saa oprinder der ikke en ny Gield, men det voxende Hielpe-Fond bliver et nyt Activum.

18.

Om Tiden, hvori den ny Gield naaer sit Maximum.

Tiden x for (S) som et Maximum findes saaledes: I Almindelighed er $S = A\left[\left(1 \div \frac{r - p}{h . (t - p)}\right) t . \frac{t^x - 1}{t - 1} + \frac{r - p}{h . (t - p)} . p . \frac{p^x - 1}{p - 1}\right]$. Sættes $A = 1$, og til Forkortning $\frac{r - 1}{h(t - p)} = g$, saa har man $S = \overline{1 \div g} . t . \frac{t^x - 1}{t - 1} + g . p . \frac{p^x - 1}{p - 1}$, Differentialet heraf er $\overline{1 \div g} . \frac{t - 1}{t} . t^x . dx \text{ Log. } t + g . \frac{p - 1}{p} . p^x . dx . \text{Log. } x$, og naar det sættes $= 0$ faaes $\overline{1 \div g} . \frac{t - 1}{t} . t^x . \text{Log. } t = \div \frac{p}{p - 1} . g . p^x . \text{Log. } p$, og $\frac{t^x}{p^x} = \frac{g . \overline{t - 1} . p . \text{Log. } p}{\overline{g - 1} . \overline{p - 1} . t . \text{Log. } t}$; og deraf følger at $x = \text{Log.}\left(\frac{gp . \overline{t - 1} . \text{Log. } p}{\overline{g - 1} . \overline{p - 1} . t . \text{Log. } t}\right) : \text{Log. } \frac{t}{p}$.

19.

Første Exempel. Sæt at $A = 1 . h = 1 . n = 2 .$ og $t = 1.03$. Da nu $r = 1.04$, saa er $p = r \div \frac{r - 1}{2} = 1.04 \div 0.02 = 1.02$; $\frac{r - 1}{n . h} = m$

 =

$= 0.02$. og $t \div m = q = 1.01$, da et Maximum finder Sted, fordi $p > q$ (No. 16) fremdeles er $g = \frac{r-p}{h.\overline{t-p}} = \frac{0.02}{0.01} = 2$, saaledes bliver $x = \text{Log.}\left(\frac{2 \times 1.02 \times 0.03 \times \text{Log. } p}{1.03 \times 0.02 \times \text{Log. } t}\right) : \text{Log. } \frac{p}{t}$. Logarithmerne her ere Logarithmi naturales.

$$\begin{array}{rl}
\text{Nu er Log. nat. } 102 = & 4.624973 \\
\text{Log. nat. } 100 = & 4.605170 \\
\hline
\text{Log. nat. } 1{,}02 = & 0.019803 \\
\text{og Log. nat. } 103 = & 4.634724 \\
\text{Log. nat. } 100 = & 4.605170 \\
\hline
\text{Log. nat. } 1{,}03 = & 0.029559 \\
\text{derfor er Log. nat. } t = & 0.029559 \\
\text{Log. nat. } p = & 0.019803 \\
\hline
\text{Log. } (t : p) = & 0.009756
\end{array}$$

og $\text{Log. } p : \text{Log. } t = \frac{0.019803}{0.029559} = 0.67$; deraf følger, at $\frac{g.p.\overline{t-1}.\text{Log.} p}{\overline{g-1}.t.\overline{p-1}.\text{Log.} t} = \frac{2 \times 1{,}02 \times 0{,}03}{1 \times 1{,}03 \times 0{,}02} \times 0.67 = 2 \times 1.48 \times 0.67 = 1.98$. Fremdeles er

$$\begin{array}{rl}
\text{Log. nat. } 198 = & 5.288267 \\
\text{Log. nat. } 100 = & 4.605170 \\
\hline
\text{Log. nat. } 1{,}98 = & 0.683097
\end{array}$$

og følgeligen $x = 0.683097 : 0.009756 = 70$.

Naar derfor det synkende Fond er ligesaa stor som det aarlige Deficit, og den halve Deel af Fondets Renter tages til Hielpe-Fondet, saa naaer den ny Gield sit Maximum efter 70 Aar, naar samme voxer efter 3 Procents Rente-Fod.

Andet Exempel. Naar alt øvrigt som forhen, og $F = \frac{1}{2} A$, eller $h = 2$, saa har ikke noget Maximum Sted; thi i dette Tilfælde er $m = \frac{r-1}{n.h} = 0{,}01$, og $t \div m = 1{,}02 = p$ (No. 16).

Tredie

Tredie Exempel. Sættes $h = \frac{1}{2}$ eller $F = 2A$, det øvrige som forhen, saa faaer man $g = 4$; derfor $\frac{g \cdot p \cdot \overline{t-1} \cdot \text{Log.}\, p}{(g-1) t \cdot \overline{p-1} \cdot \text{Log.}\, t} = \frac{4}{3} \times \frac{1,02}{1,03} \times \frac{0,03}{0,02} \times 0.67 = \frac{4}{3} \times 1,48 \times 0,67 = 1,32$

$$\begin{array}{l} \text{Log. nat. } 132 = 4,882801 \\ \text{Log. nat. } 100 = 4,605170 \\ \hline \text{Log. nat. } 1.32 = 0,277531 \end{array}$$

derfor er $x = 0.277631 : 0.009756 = 28,4$

Naar man regner ikke saa gandske nøie, og vilde vide Tiden efter Aarenes Antal, saa kan antages at $\text{Log.}\, p = p \div 1$ og $\text{Log.}\, t = t \div 1$, da de ikke differere $0,001$; saaledes faaer man $x = \text{Log.}\, \frac{g \cdot p}{\overline{g-1} \cdot t} : \overline{t \div p}$.

20.

Fierde Exempel. Sæt at $n = 4$, altsaa $\frac{r-1}{4} = \frac{0.04}{4} = 0.01$ og $p = 1.03$, derimod $t = 1.02$, saa har man for $h = 1$, $g = \frac{r-p}{t-p} = \div 1$ $g \div 1 = \div 2$. Derfor bliver $x = \text{Log.} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1,03}{1,02} \times \frac{0,02}{0,03} \times \frac{1}{0,67}\right)$ $: \text{Log.}\, \frac{1,02}{1,03} = \text{Log.}\, \frac{1}{1,98} : \text{Log.}\, \frac{1,02}{1,03} = \div 0.683097 : \div 0.009756 =$ 70 ligesom forhen i det første Exempel.

Femte Exempel. Sættes $h = \frac{1}{2}$, Resten ligesom i fierde Exempel, saa bliver $g = \div 2$ $g \div 1 = \div 3$, altsaa $\frac{g \cdot p \cdot \overline{t-1} \cdot \text{Log.}\, t}{\overline{g-1} \cdot t \cdot \overline{p-1} \cdot \text{Log.}\, t} = \frac{2}{3} \times \frac{1,03}{1,02} \times \frac{0,02}{0,03} \times \frac{1}{0,67} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1,48 \times 0,67} = 0,675$, og $x = \text{Log. nat. } 0,675 : \text{Log. nat. } \frac{1,02}{1,03}$, men Log. nat. 675 er $= 6,514713$ og Log. nat. $1000 = 6,907755$, altsaa Log. nat. $0,675 = \div 0,393042$; følgeligen $x = 0,393042 : 0,009756 = 40,4$.

21.

Naar $t = p$, saa har man (efter No. 15) $S = A\left[t . \frac{t^x - 1}{t - 1} \div \frac{r-p}{h} . \frac{1}{t-1} . \left(xt^x \div \frac{t^x - 1}{t-1}\right)\right]$. Sættes $\frac{r-p}{h} . \frac{1}{t-1} = q$, saa bliver $S = A\left(\overline{t + q} . \frac{t^x - 1}{t-1} \div qxt^x\right)$, Differentialet deraf $\frac{t+q}{t-1} . t^x . dx . \text{Log. } t \div qt^x dx \div qxt^x dx . \text{Log. } t = 0$, saa faaer man $x = \left(\frac{t+q}{t-1} . \text{Log. } t \div q\right) : q . \text{Log. } t = \frac{t}{(t-1)q} + \frac{1}{t-1} \div \frac{1}{\text{Log. } t} = \frac{t . h}{r-p} + \frac{1}{t-1} \div \frac{1}{\text{Log. } t}$, og naar sættes $t \div 1 = \text{Log. nat. } t$, saa er $x = \frac{th}{r-p}$.

Siette Exempel. Sæt at $n = 2$ $h = 1$, $t = 1,02$, og altsaa $p = 1,02$, saa bliver $x = \frac{1,02}{0,02} + 50 \div \frac{1}{0,0198} = 101 \div 50,5 = 50,5$.

Syvende Exempel. Naar $h = \frac{1}{2}$ eller $F = 2A$, saa er $x = 25\frac{1}{2} + 50 \div 50\frac{1}{2} = 25$.

22.

Naar $t = 1$ bliver $S = A\left(x \div \frac{r-p}{h} . \frac{1}{p-1} . \left(p . \frac{p^x - 1}{p-1} \div x\right)\right)$ (efter No. 15); sættes $\frac{r-p}{h} . \frac{1}{p-1} = q$, saa er $S = A\left(x + qx \div q . p . \frac{p^x - 1}{p-1}\right)$, og i Tilfælde at S er et Maximum, bliver $dx + qdx \div \frac{qp}{p-1} . p^x . dx . \text{Log. } p = 0$; deraf følger, at $x = \text{Log.}\left(\frac{\overline{1+q} . \overline{p-1}}{q . p . \text{Log. } p}\right) : \text{Log. } p = \text{Log. } \frac{1+q}{q+p} : \overline{p \div 1}$, naar $\text{Log. nat. } p = p \div 1$.

Ottende Exempel. Naar $n = 2$, $t = 1$ og $h = 1$, saa er $p = 1,02$, $q = \frac{0,02}{0,02} = 1$, $\text{Log. } p = 0,019803$, altsaa $x = \text{Log.}\left(\frac{2}{1,02} \times \frac{0,02}{0,0198}\right) : 0,0198 = \text{Log. } 2 : 0,0192$ paa det nærmeste, $0,663147 : 0,0198 = 33,49$.

23.

Saafremt $p = 1$, er $S = A\left(t.\frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div \frac{r - 1}{h}.\frac{1}{t - 1}.\left(t.\frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div x\right)\right)$. Sættes $\frac{r \div 1}{h}.\frac{1}{t - 1} = q$, og altsaa $S = A\left(t.\frac{t^x \div 1}{t - 1}.(1 \div q) + qq\right)$, saa er Differentialet i Tilfælde at $S =$ Maximum $\overline{1 \div q}.\frac{t}{t \div 1}.t^x dx.\mathrm{Log.}\,t + qdx = 0$, og da bliver $x = \mathrm{Log.\,nat.}\left(\frac{q.\overline{t - 1}}{\overline{q - 1}.t.\mathrm{Log.}\,t}\right) : \mathrm{Log.}\,t$, eller naar antages $\mathrm{Log.}\,t = t \div 1$, da er $x = \mathrm{Log.}\frac{q}{(q \div 1)t} : \overline{t \div 1}$.

Niende Exempel. Naar $p = 1$, saa bliver $n = 1$ fordi $r \div \frac{r \div 1}{1} = p = 1$; naar nu $t = r$, saa bliver $t \div m = t \div \frac{r - 1}{n.h}$, og naar $h = 1$, saa er $t \div m = 1 = p$; i dette Tilfælde har ingen Maximum Sted (No. 16). Sættes derfor $t = 1,03$, saa har man $q = \frac{0,04}{0,03} = \frac{4}{3}$, og $x = \mathrm{Log.\,nat.}\left(\frac{\frac{4}{3} \times 0,03}{\frac{1}{3} \times 1,03 \times 0,029559}\right) : 0,029559 = \mathrm{Log.}\frac{0,12}{0,03044577} : 0,029559 = \mathrm{Log.}\,3,9 : 0,029559$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Log.\,nat.}\,39 &= 3,663561 \\ \mathrm{Log.\,nat.}\,10 &= 2,302585 \\ \hline \mathrm{Log.\,nat.}\,3,9 &= 1,360976 \end{aligned}$$

derfor er $x = 1,360976 : 0,02956 = 46,3$.

24.

Naar $t = 1$, og ligeledes $p = 1$, altsaa $n = 1$.; saa har man $S = A\left(x \div \frac{r - 1}{nh}.x.\frac{\overline{x + 1}}{2}\right)$ (efter No. 15), og naar S er et Maximum, er $dx \div \frac{r \div 1}{nh}.\left(\frac{1}{2}dx + xdx\right) = 0$; altsaa $x = \frac{h}{r - 1} \div \frac{1}{2}$.

25.

Naar (x) eller Tiden, hvori S opnaaer sit Maximum, er funden, saa findes Størrelsen af dette Maximum meget læt efter Formlen udi No. 15; ogsaa har man ligeledes den største Sum af Renter, som svarer til den ny Gield efter Rente-Foden t. Renterne af denne Gield $t \div 1$ bliver hvergang paa ny optagen. Resten af Renterne, som er $(r \div t)$, og som i Tilfælde af Maxi-

Maximum bliver $(r \div t)$ M, er den Deel, som ligger Staten eller Communnen til Byrde, men som formindskes naar den ny Gield igien aftager. Summen, som er betalt af det synkende Fond i det samme Tidsrum, da den ny Gield naaer sit Høieste, er $= F\,(p + p^2 + \ldots + p^n) = F \cdot p \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} = \frac{A}{h} \cdot p \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}$, naar (n) sættes for (x) i dette Tilfælde.

For paa engang at oversee Resultaterne af de forhen beregnede Exempler, har jeg tilføiet følgende Tabelle, hvori A er Uniteten for Penge-Tallet.

Antages	Saa er Tiden af det Maximum.	Størrelsen af det Maximum.	Renterne til det Maximum.	Afdrag af den gamle Gield.
$t = 1,03$ $n = 2$ $h = 1$	70 Aar	68, 44	0, 6844	152, 977
$t = 1,03$ $n = 2$ $h = \frac{1}{2}$	28, 4	18, 52	0, 1852	77, 78
$t = 1,02$ $n = 4$ $h = 1$	70	68, 44	0, 13688	237, 512
$t = 1,02$ $n = 4$ $h = \frac{1}{2}$	40, 4	29, 6	0, 592	95, 64
$t = 1,02$ $n = 2$ $h = 1$	50, 5	36, 79	0, 7358	87, 67
$t = 1,02$ $n = 2$ $h = \frac{1}{2}$	25	14, 3	0, 286	65, 34
$t = 1$ $n = 2$ $h = 1$	33, 49	21	0, 84	47, 98
$t = 1,03$ $n = 1$ $p = 1$. $h = 1$	46, 3	28, 2	0, 282	46, 3
$t = 1,02$ $n = 1$ $h = 1$	33, 49	19	0, 38	33, 49

26.

Man kan prøve Rigtigheden af Regningen for de udfundne Tider og Størrelsen af Maximum paa denne Maade: Sættes at (m) er Aarenes Antal, som svare til den Tid, da S er et Maximum, saaledes at det Maximum falder ved Aarets Slutning, saa voxer denne ny Gield udi det $\overline{m+1}$de Aar paa en Side (1) ved Renterne af samme $(t \div 1)$ M, og (2) ved det aarlige Deficit (A) og dets Renter til Aarets Udgang, At. Derimod formindskes samme ved Hielpe-Fondet, som er $\frac{r-1}{n} . F (1 + p + p^2 + + p^m)$. Gieldens Forandring i det $\overline{m+1}$de Aar er derfor $(t \div 1) M + tA \div \frac{r-1}{n} . F . \left(\frac{p^{m+1}-1}{p-1}\right)$, beregnet efter hele Aar, og ikke efter Øieblikke. Denne Forandring maae enten være $= 0$, eller dog kun liden, positiv eller negativ. Naar Maximum falder præcise ind ved Slutningen af det mde Aar, saa bliver det negativ; men naar dette Maximum oprinder i Aarets Løb, saa kan Forandringen i dens Størrelse ved Slutningen være $= 0$, naar den er ligesaa meget formindsket i Resten af Aaret, som den er voxen i den første Deel af samme. Forandringen for det hele Aar kan ogsaa være positiv eller en Tiltagelse, naar Maximum falder nærmere til Aarets Udgang end til dets Begyndelse; ogsaa kan den blive negativ i modsatte Tilfælde. Men i ethvert Tilfælde bliver Forandringen kun liden, og naar man ligeledes tager den nærmeste Forandring i det foregaaende eller i det efterfølgende Aar, saa maae Forandringen blive positiv for det første, og negativ for det sidste Aar. Naar man derfor sætter det for (x) fundne Tal $= m$, og den fundne Størrelse af Maximum for M, maae man næsten have $(t \div 1) M + tA = \frac{r-1}{n} . F . \frac{p^{m+1}-1}{p-1}$ eller $M + \frac{t}{t-1} A = \frac{r-1}{t-1} . \frac{1}{n} . F . \frac{p^{m+1}-1}{p-1}$, og naar man nu gaaer et Aar videre frem med Prøven, saa sees strax om den fundne Tid har det Maximum rigtig beregnet eller ikke.

27.

Tidsrummet, efter hvilken den ny oprindende Gield bliver igien gandske ophævet af Hielpe-Fondet, eller $S = 0$, findes saaledes: Den almindelige Formel for (S) er (efter No. 15), naar $A = 1$, følgende:

 S =

$S = \left(1 \div \frac{r-p}{t-p} \cdot \frac{1}{h}\right) t \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} + \frac{r \div p}{t \div p} \cdot \frac{1}{h} \cdot p \cdot \frac{p^x \div 1}{p \div 1}$. Til Forkortning sætter man $\left(1 \div \frac{r-p}{t-p} \cdot \frac{1}{h}\right) \frac{t}{t-1} = q$, og $\left(1 \div \frac{r \div p}{t \div p} \cdot \frac{1}{h}\right) \frac{p}{p-1} = k$; og da har man $S = q(t^x \div 1) + k(p^x \div 1)$, som skal blive $= 0$. Derfor er $qt^x + kp^x = q + k$, eller $\frac{t^x \div 1}{p^x \div 1} = \div \frac{k}{q}$.

Naar man udi Tabellen antager x saaledes udi t^x og p^x, at $\frac{t^x \div 1}{p^x \div 1} + \frac{k}{q} = 0$; saa har man Størrelsen af x, som svarer til $S = 0$. Naar $\frac{q}{k} \cdot (t^x \div 1) + p^x \div 1 = \frac{S}{k}$ er positiv, saa har man taget x for liden, derimod for stor, naar fornevnte Qvantitet befindes negativ.

For at finde x paa det nærmeste, kan man antage, at $\frac{t^x \div 1}{p^x - 1} = \frac{t^x}{p^x} = \div \frac{k}{q}$, saa bliver $x = \text{Log.} \div \frac{k}{q} : \text{Log.} \frac{t}{p} = \text{Log.} \div \frac{k}{q} : \frac{t \div 1}{p \div 1}$ (No. 19). Men naar man har funden Værdien af x paa det nærmeste den sande, saa kan den endnu nærmere findes paa følgende Maade ved Differentiation. Man har $dS = qt^x dx \,.\, \text{Log. } t + kp^x dx \,.\, \text{Log. } p$, og $\frac{dS}{dx} = qt^x \,.\, \text{Log. } t + kp^x \,.\, \text{Log. } p$; hvor dS er et Decrement eller en negativ Størrelse, eftersom S formindskes naar Tiden tiltager. Har man nu funden S saa nær $= 0$ (da naar man gaaer videre bliver samme negativ), at dS kan antages for S selv, saa bliver $\frac{-S}{qt^x \,.\, \text{Log. } t + kp^x \,.\, \text{Log. } p} = \frac{-S}{qt^x \,.\, (t-1) + kp^x \,.\, (p-1)} = dx$ paa det nærmeste, og dx er den Forandring, som maae tillægges eller fradrages den fundne Værdie af x, eftersom $\frac{S}{k}$ har været enten positiv eller negativ, alt for at naae den søgte Tidspunkt for den fulde Ophævelse af S, det er for at man skal befinde $S = 0$.

Anmærkning. Denne Operations-Methode beroer paa Brugen af Regula falsi forenet med Differential-Regningen. Udi Cagnoli Trigonometrie, som er et meget classisk Skrivt, hvorudi findes adskillige Sætninger,

der

der ere denne skarpsindige Forfatters egen Opdagelse, kan man see ommeldte Methode oplyst ved Exempler, som bevise dens udstrakte Anvendelse i Arithmetiken.

28.

Exempel. Sæt at $t = 1,03$, $h = 1$, $n = 2$, og derfor $p = 1,02$, saa er $q = \left(1 \div \frac{0,02}{0,01}\right) \cdot \frac{1,03}{0,03} = \div \frac{103}{3}$, og $k = 2 \cdot \frac{1,02}{0,02} = 102$, derfor er $\div \frac{k}{q} = \frac{102 \times 3}{103} = \frac{306}{103}$. Men Log. nat. $306 = 5,723585$, Log. nat. $103 = 4,634728$, altsaa Log. $\frac{306}{103} = 0,988857$. Tages nu først $x =$ Log. $\div \frac{k}{q}$: Log. $\frac{t}{p} =$ Log. $\div \frac{k}{q}$: (Log. $t \div$ Log. p) $=$ Log. $0,988857 : 0,01 = 99$ paa det nærmeste, saa bliver $S = q\,(t^{99} \div 1) + k\,(p^{99} \div 1) = \div \frac{103}{3} \times 17,659 + 102 \times 6,1026 = 16,1532$.

For nu at rette Værdien af x, saa er $dx = \frac{\div S}{qt^x \cdot (t \div 1) + kp^x\,(p \div 1)} = \frac{16,1532}{\div \frac{103}{3} \times 18,659 \times 0,03 + 102 \times 7 \times 102 \times 6 \times 002} = \frac{\div 16,1532}{\div 4,7295} = 3,5$. Adderes denne Correction til 99, fordi S har været positiv, og derfor dS som en Decrement negativ, som giver dx positiv, saa faaer man 102,5 til Værdie af x, dens sande Værdie paa det nærmeste; thi naar man sætter $x = 102$, saa bliver $S = 0,885$, som er endnu positiv; derimod bliver S negativ, naar $x = 103$.

Naar $h = \frac{1}{2}$, og Resten som forhen, saa naaer S sin høieste Størrelse udi 28,4de Aar (efter No. 25). I dette Tilfælde har man $q = \div 103$, $k = 204$. Man finder paa samme Maade $x = 49,4$. Sættes $x = 49$, saa er S endnu positiv $= 1,012$, men for $x = 50$ allerede negativ.

29.

Udi Tilfælde at $t = p$ har man $S = A\left[\left(t + \frac{r \div p}{x \div 1} \cdot \frac{1}{h}\right)\frac{t^x \div 1}{t \div 1} \div \frac{r \div p}{t \div 1} \cdot \frac{1}{h} \cdot xt^x\right]$ i Følge (No. 12), og sættes $\frac{r \div p}{t \div 1} \cdot \frac{1}{h} = q$, saa er $S =$

Tt 3 (t+q)

$(t + q)\frac{t^x - 1}{t - 1} \div qxt^x$, som skal være $= 0$; her findes ved Hielp af Tabellen af t^x og $\frac{t^x - 1}{t - 1}$ strax Værdierne for x, da $\frac{t + q}{q} \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} = xt^x$. Af denne næsten sande Størrelse af x findes efter fornævnte Approximations-Methode den endnu nærmere sande Værdie. Man faaer $\frac{dS}{dx} = \left(\frac{t + p}{t - 1} \cdot \text{Log. } t \div q \div qx \text{ Log. } t\right) t^x = (t \div qx\,(t \div 1))\, t^x$ og $dx = \frac{dS}{(t - qx \cdot (t - 1))\, t^x}$.

30.

Første Exempel. Sæt at $n = 2$, altsaa $p = 1{,}02$, $h = 1$, ligeledes $t = 1{,}02$, saa bliver $q = \frac{0{,}02}{0{,}02} = 1$; deraf følger at i Tilfælde $S = 0$ bliver $\frac{2{,}02}{0{,}02} \cdot (t^x \div 1) = xt^x$, eller $101\,(t^x \div 1) = xt^x$. Af Tabellen for t^x, naar $t = 1{,}02$, findes strax at S bliver næsten Nul, naar $x = 80$. Sættes derfor $x = 80$, saa er $S = 2{,}02 \times 193{,}77 \div 80 \times 4{,}875 = 1{,}4154$, som er positiv. I Tilfælde at $x = 81$ bliver $S = 2{,}02 \times 198{,}647 \div 81 \times 4973 = \div 1{,}6$, som er negativ, da man ved Approximationen faaer $x = 80{,}5$.

31.

Andet Exempel. Sæt $h = \frac{1}{2}$, og Resten som udi forrige Exempel, saa er $q = 2$, og $S = \frac{3{,}02}{0{,}02}(t^x \div 1) \div 2xt^x = 0$; følgeligen $(151 \div 2x)\, t^x = 151$. Man antager først $x = 50$, saa er $S = 151 \times 1{,}692 \div 100 \times 2{,}692 = \div 14{,}7$, hvoraf sees, at x er tagen for stor; men da $\frac{dS}{dx}(3{,}02 \div 2 \div 2 \times 50 \times 0{,}02)\, t^{50} = 2{,}64$, saa bliver $\frac{14{,}7}{2{,}64} = 5{,}5$. Denne Correction afdragen fra 50 giver $x = 44{,}5$. Men i Tilfælde at $x = 44$ har man $S = \div 0{,}53$ endnu negativ, og $\frac{dS}{dx} = \div 0{,}74$; derfor $0{,}53 : 0{,}74 = 0{,}7$; saaledes bliver $x = 44 \div 0{,}7 = 43{,}3$. Antages $x = 43$, saa er $S = + 1{,}1$ positiv; den sande Værdie af x falder derfor mellem 43 og 44. Naar $h = 2$, Resten i øvrigt som forhen, findes for $S = 0$, $x = 144{,}2$.

32.

32.

Naar $n = 2$, $t = 1$, og $h = 1$, findes paa den samme Maade af den til dette Tilfælde svarende Formel for S, Tiden $x = 62,6$, naar $S = 0$. Og naar $h = \frac{1}{2}$, bliver $x < 37$, og > 36; derimod naar $h = t$ falder x imellem 95 og 96.

33.

Sættes $n = 1$, og følgeligen $p = 1$, $h = 1$, $t = 1,02$, saa findes $S = 0$, naar x falder imellem 62 og 63. Naar $h = \frac{1}{2}$, falder Værdien af x mellem 26 og 27. Men naar $h = 2$, bliver $x = \infty$, som stemmer overeens med Prøven udi No. 16. Thi i dette Tilfælde er $t = 1,02$ og $\frac{r \div p}{h} + p = \frac{1,04 \div 1}{2} + 1 = 1,02$, men t skal være mindre end Størrelsen $\frac{r \div p}{h} + p$, naar S skal kunde forsvinde.

34.

Omendskiønt Regningen nu viser, at Staten eller Communen, som har en fastsat og i geometrisk Forhold med Rente-Foden voxende Afbetalings-Fond, kan tillige for et aarlig Deficit i Indtægterne paadrage sig en ny Gield, og tillige savne slig et Hielpe-Fond til Lættelse i de dertil svarende Renter, saaledes at det synkende Fond ikke hindres fra at opnaae sit Øiemed, dog saa at den forønskte fulde Ophævelse af Gielden bliver udsat for en større Mængde af Aar; saa er det endnu et andet Spørsmaal: om saadan en Indretning ved Hielpe-Fondet i andre Hensigter kunde tilraades? Paa den ene Side har man derved den Fordeel, at den nærværende Byrde ved Renterne bliver lættet, desuden at der gives et Maximum i den ny Gields Voxning, og derfor ogsaa et Maximum af Rente-Fondet, hvilke siden af sig selv formindskes. Men paa den anden Side bliver ogsaa de Afbetalings-Fonds derved svækkede, at de ikke voxe i en saa stor Forhold, som den, hvori de ellers kunde tiltage efter den sædvanlige Rente-Fod. Derfor bliver Tiden, hvori den gamle Gield ophæves, meget langvarigere, og derved underkastes den hele Indretning en med Tidens Fremgang tiltagende Usikkerhed om at kunde blive vedligeholdt. Angaaende de forhen ommeldte Fordele: at den ny Gield naaer sit Høieste og

følge-

følgeligen ogsaa den Rentesumme, som aarlig bør udredes, da kan det samme opnaaes paa en anden Maade, udenat det synkende Fond ved Afdrag af en Deel af sine Renter til et Hielpe-Fond, skulde blive strax i Begyndelsen svækket, og dets Operationer meget forsinket. Man kan i Fremtiden, naar Nøden kræver det, gribe til det synkende Fond selv, for saavidt deraf er tilvunden aarlige Renter, og lade det begynde en ny Epoche i sine Operationer, men saaledes, at ikke dens Fremgangsmaade eller Tiltagelses Forhold siden nedsættes.

For at give almindelig Udkast af de arithmetiske Betragtninger, som forekomme ved slige Finance-Spørgsmaal, og som skulde bruges som et Lys, for at opdage de meest passende Midler, uagtet de ikke allene decidere, da der maae altid haves Hensyn paa de virkelige Omstændigheder, vil jeg endnu tilføie det Følgende.

35.

Sættes Summen af den gamle Gield $= D$, saa er D dens rede Værdie, dens Værdie i indeværende Tid, og de aarlige Renter deraf $= (r \div 1) D$; Annuum af Afbetalings-Fondet $= F$. Tidsrummet for Afbetalingen er efter Aarene $= x$. Reduceres nu enhver Betaling $(r \div 1) D$ til dens rede Værdie i Begyndelsen af det første Aar ved at discontere samme, saa er dens rede Værdie af Renterne for det første Aar $= \frac{r-1}{r} D$, for det andet Aar $\frac{r-1}{r^2} . D$, og saa videre, for det xde Aar $= \frac{r-1}{r^x} . D$. Derfor er den rede Værdie af samtlige i x Aar $= (r \div 1) D \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\right) = (r \div 1) D . \int \frac{1}{r^x}$. Annuum af Afbetalings-Fondet bliver betalt i Begyndelsen af Aaret; dets rede Værdie er derfor for det første Aar $= F$, for det andet Aar $= F . \frac{1}{r}$, for det tredie Aar $= F . \frac{1}{r^2}$, for det xde Aar $= F . \frac{1}{r^{x-1}}$, og Summen af den for x Aar ialt $F\left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^{x-1}}\right) = rF\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\right) = rF . \int \frac{1}{r^x}$. Endvidere sættes det aarlige Deficit, hvoraf opr inder en ny Gield $= A$, som behøves i Begyndelsen af Aaret. De aarlige Renter deraf, hvormed samme voxer $= (t \div 1) A$. Og da r er den sædvanlige

lige Rente-Fod, saa bliver den Deel af Renten, som Staten maae oppebære udenfor Afbetalings-Fondet $= (r \div 1) \div (t \div 1)$ for Capitalen 1, eller, som er det samme, $(r \div t)$ for Capitalen 1. Lad nu Afbetalings-Fondet voxe frit efter Rente Foden r, og ligeledes den ny Gield efter Rente-Foden t, saa har man den Summe af Afbetalings-Fondet efter x Aar $= F(r + r^2 + \ldots + r^x) = F.r.\frac{r^x - 1}{r - 1}$, og dens rede Værdie $= F.r.\frac{r^x \div 1}{r - 1}.\frac{1}{r^x} = rF.\int\frac{1}{r^x}$ ligesom forhen. Summen af den ny Gield efter x Aar, det er ved Slutningen af det xde Aar $= S = A.t.\frac{t^x \div 1}{t \div 1}$. Men naar ikke den Deel af Renten til den ny Gield $(r \div t)$ for Capitalen 1 bliver betalt udenfor Fondet F, saa at den havde tiltaget efter den sædvanlige Rente-Fod r, da har man havt $S = A.r.\frac{r^x - 1}{r - 1}$ og dens disconterede Værdie $= A.r.\frac{r^x \div 1}{r \div 1}.\frac{1}{r^x} = A.r.\int\frac{1}{r^x}$.

36.

Den rede Værdie af de Renter, som Staten bærer udenfor Fondet F til den ny Gields Forrentning, findes paa følgende Maade: Gielden, hvortil disse Renter svare, er i Begyndelsen af første Aar $= A$, af andet Aar $= A + At$, af tredie Aar $= A + At + At^2$, og saa videre; derfor Renterne ved Slutningen af første Aar $= (r \div t)A$, af andet Aar $(r \div t)(A + At)$, af tredie Aar $(r \div t)(A + At + At^2)$, og for det ubestemte xde Aar $= (r \div t)A(1 + t + t^2 + \ldots + t^{x \div 1}) = (r \div t)A.\frac{t^x - 1}{t - 1}$. Den rede Værdie deraf, naar de disconteres til Begyndelsen af Tiden, er for det som gives i Slutningen af det første Aar $(r \div t)\frac{A}{r}$, af andet Aar $(r \div t)A\left(\frac{r - t}{r^2}\right)$, af tredie Aar $(r \div t)A.\left(\frac{1 + t + t^2}{r^3}\right)$, og saa videre, af xde Aar $(r \div t)A\left(\frac{1 + t + t^2 + \ldots + t^{x \div 1}}{r^x}\right)$. Summen af dem er ialt $= (r \div t)A\left(\frac{t \div 1}{t \div 1}.\frac{1}{r} + \frac{t^2 - 1}{t - 1}.\frac{1}{r^2} + \frac{t^3 - 1}{t - 1}.\frac{1}{r^3} + \ldots + \frac{t^x - 1}{t - 1}.\frac{1}{r^x}\right) = \frac{r - t}{t - 1}.A.\int\frac{t^x - 1}{r^x} = \frac{r - t}{t - 1}.A\left(\int\frac{t^x}{r^x} \div \frac{1}{r^x}\right)$. Og naar for $\int\frac{t^x}{r^x}$ samt $\int\frac{1}{r^x}$, som ere Summer af geometriske

Rækker, omſættes deres bekiendte Værdier, ſaa bliver den forrige Værdie af alle diſconterte Renter $= \frac{A}{t-1} \cdot \left(\frac{r}{r-1} + \frac{r-t}{r-1} \cdot \frac{1}{r^x} \div t \cdot \frac{t^x}{r^x}\right)$.

37.

Sættes at Renten af D ſkulde i Forhold med Tiden formindſkes, ſaaledes, at naar der ved Slutningen af det førſte Aar betales $(r \div 1)\,D$, ſom diſconteret giver $\frac{(r-1)\,D}{r}$, ſaa ſkal ved Slutningen af det andet Aar betales $(r \div 1)\,D \div \frac{1}{m}(r \div 1)\,D$, og ſamme diſconteret bliver $\frac{(r-1)\,D}{r^2} \div \frac{1}{m}\frac{(r-1)\,D}{r^2}$. Fremdeles ved Slutningen af det tredie Aar efter dens rede Værdie $\frac{(r-1)\,D}{r^3} \div \frac{2}{m} \cdot \frac{(r-1)\,D}{r^3}$, og af det xde Aar $\frac{(r-1)\,D}{r^x} \div \frac{x-1}{m} \cdot \frac{(r-1)\,D}{r^x}$. Summen af dem ſættes $= R$, ſaa er $R = (r \div 1)\,D \cdot \int \frac{1}{r^x} \div \frac{r-1}{m} \cdot D \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \ldots + \frac{x-1}{r^x}\right) = D \div D \cdot \frac{1}{r^x} \div \left(\frac{r-1}{m}\right) D \cdot \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} + \ldots + \frac{x-1}{r^{x-1}}\right) = D \div D \cdot \frac{1}{r^x} \div \left(\frac{r-1}{m}\right) \cdot D \cdot \frac{1}{r} \cdot \int \frac{x-1}{r^{x \div 1}} = D \div \frac{1}{r^x} \cdot D \div \frac{r-1}{m} \cdot D \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r-1}\left(r \int \frac{1}{r^{x \div 1}} \div \frac{x-1}{r^{x \div 1}}\right) = D \div \frac{1}{r^x} \cdot D \div \frac{1}{m} D \cdot \left(\int \frac{1}{r^{x \div 1}} \div \frac{x-1}{r^x}\right) = D \div \frac{D}{r^x} \div \frac{1}{m} D \left(\int \frac{1}{r^x} \div \frac{x}{r^x}\right) = D \div D \cdot \frac{1}{r^x} \div \frac{1}{m} \cdot D \cdot \frac{1}{r^x} \cdot \frac{r^x - 1}{r-1} + \frac{1}{m} \cdot D \cdot \frac{x}{r^x} = D\left(1 \div \frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{m} \div \frac{1}{r^x} + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r \div 1} \cdot \frac{1}{r^x} + \frac{1}{r^x} \cdot \frac{x}{m}\right) = D\left(1 \div \frac{1}{m \cdot (r-1)}\right) + \frac{1}{r^x} \cdot D\left(\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r \div 1} + \frac{x}{m} \div 1\right) = \left(1 \div \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r-1}\right) D + D \cdot \frac{1}{r^x}\left(\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{r-1} + x \div m\right)\right) = \left(1 \div \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r-1}\right) D + \frac{1}{m} \cdot D \cdot \frac{1}{r^x}\left(\frac{1}{r \div 1} + x \div m\right)$, og naar $m = x$, ſaa bliver det $= \left(1 \div \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r-1}\right) D + \frac{1}{m} \cdot D \frac{1}{r^x} \cdot \frac{1}{r-1} = \left(1 \div \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{r \div 1} \cdot \left(1 \div \frac{1}{r^x}\right)\right) D$.

38.

Førſte Sætning. Naar der ikke oprinder nogen ny Gield, ſaa findes Tiden, da den gamle Gield ophæves ved Afbetalings-Fondet,

saavel

saavel ved Sammenligning af de udkommende voxende Værdier af begge, som ved Æqvationen mellem deres rede Værdier. Man har $\frac{F(r^x - 1)r}{r \div 1} = D$; det er: Summen af Afbetalings-Fondet efter xde Aar maae være ligesaa stor som Gielden, der skal ophæves, naar Renterne gives af et andet Rente-Fond. Man har ogsaa $((r \div 1)D + rF) \int \frac{1}{r^x} = D$; det er: den rede Værdie af Renterne med den samme Værdie af det aarlige F af Afbetalings-Fondet maae være ligestor med den rede Værdie af Gielden, der bliver ophævet. Virkningen maae være ligestor med sine Aarsager.

39.

Den første Ligning følger af den sidste, og denne af hiin; thi $(r \div 1)D \,.\, \int \frac{1}{r^x} = \overline{r \div 1} \,.\, D\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\right) = (r \div 1) D \,.\left(\frac{\frac{1}{r} \div \frac{1}{r^{x+1}}}{1 \div \frac{1}{r}}\right) = D \,.\, \frac{r^x \div 1}{r^x}$, og $F \,.\, \int \frac{1}{r^x} = F \,.\, \frac{(r^x \div 1)r}{(r \div 1) \,.\, r^x}$, følgeligen $D \,.\, \frac{r^x \div 1}{r^x} + F \,.\, \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \,.\, \frac{r}{r^x} = D$, og $F \,.\, \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \,.\, \frac{r}{r^x} = \frac{D}{r^x}$, samt $F \,.\, \frac{r^x - 1}{r - 1} \,.\, r = D$. Af $((r \div 1)D + rF) \int \frac{1}{r^x} = D$ faaer man $D : [(r \div 1)D + rF] = \int \frac{1}{r^x} = \frac{1}{r - 1} \div \frac{1}{(r-1)^2} \,.\, \frac{rF}{D} + \frac{1}{(r \div 1)^3} \,.\, \frac{r^2 \,.\, F^2}{D^2} \div +$, og naar $\frac{rF}{(r \div 1)D} = \frac{1}{p}$, saa er $\int \frac{1}{r^x} = \frac{1}{r \div 1}\left(1 \div \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \div +\right)$. Men denne Æqvation er kun brugbar naar $\frac{1}{p}$ er betydeligen mindre end en Unitet. Naar Renterne $(r \div 1)D$ aftager aarligen i Forhold med Tiden, saa har man (efter No. 37) den rede Værdie af alle successive betalte Renter $R = \left(1 \div \frac{1}{m} \,.\, \frac{1}{r \div 1} \,.\left(1 \div \frac{1}{r^x}\right)\right) D$. Deraf følger, at man maae befinde $\left(1 \div \frac{1}{m} \,.\, \frac{1}{r - 1}\left(1 \div \frac{1}{r^x}\right)\right) D + F \,.\, \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \,.\, r \,.\, \frac{1}{r^x} = D$, eller $F \,.\, \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \,.\, r \,.\, \frac{1}{r^x} = \left(\frac{1}{m} \,.\, \frac{1}{r - 1} \,.\left(1 \div \frac{1}{r^x}\right)\right) D$, og $F \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \,.\, r = \frac{1}{m} \,.\, (r^x \div 1) D$, samt $Fr = \frac{1}{m} D = \frac{1}{x} D$, og $x = D : Fr$.

40.

Anden Sætning. Naar der oprinder en ny Gield A, som voxer efter Rente-Foden t, saa maae, naar Afbetalingen af den hele Gield, den gamle med den ny, skeer i Tiden x, befindes $F \cdot \frac{(r^x - 1)r}{r - 1} = D + A \frac{(t^x \div 1)}{t \div 1} \cdot t$. Naar denne Afbetaling er skeet, saa har Staten indfriet sit Rente-Fond, aarlig $(r \div 1)D$, tillige det Aarlige af det synkende Fond F, og har derfor et aarlig Overskud af $(r \div 1)D + F \div A$.

41.

Tredie Sætning. Den rede Værdie af alle de Summer, som successive udbetales x Aar igiennem, er ligestor med den rede Værdie af de Summer, som ere betalte eller bleven forhindrede fra at oprinde i samme Tid. I Afbetalings-Tiden x er afbetalt den første Gield D og den ny, som for sig selv havde voxet til $A \frac{(r^x - 1)r}{r - 1}$. Dertil er anvendt Rente-Fondet for D eller $\overline{r \div 1} \cdot D$ aarligen, og F aarligen til Afbetalings-Fondet, med Renterne af den ny Gield $(r \div t)$, som er betalt udenfor begge disse Fonds; saa følger, at $D + A \frac{(r^x - 1)r}{r \div 1} \cdot \frac{1}{r^x} = [(r \div 1)D + rF] \int \frac{1}{r^x} + \frac{r \div t}{t - 1} \cdot A \cdot \left(\int \frac{t^x}{r^x} \div \int \frac{1}{r^x}\right)$ (No. 34. 35 og 36).

Rigtigheden af denne Ligning sees deraf, at naar man i Stedet for $rF \cdot \int \frac{1}{r^x}$ sætter denne Værdie udi No. 40, saa faaer man en identisk Eqvation. Da bliver $rF \cdot \int \frac{1}{r^x} = rF\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\right) = \frac{F}{r^x} \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot r = \frac{1}{r^x} \cdot D + \frac{1}{r^x} \cdot A \cdot \frac{(t^x \div 1)t}{t \div 1}$ (No. 40); deraf følger at $D + A \frac{(r^x \div 1)}{r - 1} \cdot \frac{r}{r^x} = (r \div 1)D \cdot \int \frac{1}{r^x} + \frac{1}{r^x} \cdot D + \frac{1}{r^x} \cdot A \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \cdot t + \frac{r \div t}{t \div 1} \cdot A\left(\int \frac{t^x}{r^x} \div \int \frac{1}{r^x}\right)$. Men nu er $(r \div 1)D \cdot \int \frac{1}{r^x} + \frac{1}{r^x} D \div D = 0$, eftersom $(r \div 1)D \cdot \int \frac{1}{r^x} = rD\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\right) \div D\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\right) = D\left(1 + \frac{1}{r} + + \frac{1}{r^{x \div 1}} \div \frac{1}{r} \div \frac{1}{r^2}\right.$

— —

$-- \frac{1}{r^x}\Big) = D \div \frac{1}{r^x} D$, derfor er $(r \div 1) D \cdot \int \frac{1}{r^x} + \frac{1}{r^x} \cdot D \div D = D \div \frac{1}{r^x} \cdot D + \frac{1}{r^x} \cdot D \div D = 0$. End videre er $\frac{r-t}{t-1} \cdot \Big(\int \frac{t^x}{r^x} \div \int \frac{1}{1^x}\Big) + \frac{1}{r^x} \cdot \frac{(t^x \div 1)}{t \div 1} \cdot t \div \frac{1}{r^x} \cdot \frac{(r^x - 1)\, r}{r \div 1} = 0$; thi $\frac{r \div t}{t-1} \cdot \int \Big(\frac{t^x \div 1}{r^x}\Big) = \frac{r-t}{t-1} \cdot \Big(\frac{t}{r} + \frac{t^2}{r^2} + + \frac{t^x}{r^x}\Big) \div \frac{r-t}{t-1} \cdot \Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + + \frac{1}{r^x}\Big) = \frac{r \div t}{t \div 1} \cdot \frac{\frac{t^x}{r^x} - 1}{\frac{t}{r} - 1} \cdot \frac{t}{r} \div \frac{r-t}{t-1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\frac{1}{m} \div 1}{t-1} = \frac{r \div t}{t-1} \cdot t \cdot \frac{t^x \div r^x}{t-r} \cdot \frac{1}{r^x} \div \frac{r \div t}{t \div 1} \cdot \frac{1 - r^x}{1-r} \cdot \frac{1}{r^x} = \frac{t}{t \div 1} \cdot \frac{r^x - t^x}{r^x} \div \frac{r-t}{t-1} \cdot \frac{r^x - 1}{r-1} \cdot \frac{1}{r^x}$, derfor bliver $\frac{t}{t-1} \cdot \overline{r^x \div t^x} \cdot \frac{1}{r^x} \div \frac{r \div t}{t \div 1} \cdot \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot \frac{1}{r^x} + \frac{1}{r^x} \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \cdot t \div \frac{1}{r^x} \cdot \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot r = \frac{1}{r^x}\Big(\frac{t \cdot r^x}{t \div 1} \div \frac{r \cdot r^x}{r \div 1} \div \frac{r-t}{(t-1)\cdot(r-1)} \cdot r^x + \frac{r}{r-1} \div \frac{t}{t \div 1} + \frac{r-t}{(t \div 1)(r \div 1)}$. Men $\frac{r}{r \div 1} \div \frac{t}{t \div 1} + \frac{r-t}{(t \div 1)(r \div 1)} = \frac{rt - r - rt + t + r - t}{(r-1)\cdot(t-1)} = 0$.

42.

Derfor kan og begge Æqvationerne udi No. 40 og 41 udvikles, den ene af den anden. Thi $[(r \div 1) D + rF] \int \frac{1}{r^x} = D \div \frac{D}{r^x} + F \cdot \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot \frac{1}{r^x}$, og $\frac{r \div t}{t \div 1} \cdot \int \frac{t^x \div 1}{r^x} = \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot \frac{r}{r^x} \div \frac{t^x - 1}{t-1} \cdot \frac{t}{r^x}$. Derfor følger af No. 41 at $[(r \div 1) D + rF] \int \frac{1}{r^x} + \frac{r \div t}{t \div 1} A \cdot \int \frac{t^x \div 1}{r^x} = D \div \frac{D}{r^x} + F \cdot \frac{r^x - 1}{r-1} \cdot \frac{r}{r^x} + A \Big(\frac{r^x \div 1}{r-1} \cdot \frac{r}{r^x} \div \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \cdot \frac{t}{r^x}\Big) = D + A \frac{r^x - 1}{r-1} \cdot \frac{r}{r^x}$, det er, $F \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot \frac{r}{r^x} = \frac{D}{r^x} + A \cdot \frac{t^x \div 1}{t \div 1} \cdot \frac{t}{r^x}$, eller $F \cdot \frac{r^x - 1}{r-1} \cdot r = D + A \cdot \frac{t^x - 1}{t-1} \cdot t$, som er Ligningen udi No. 40.

43.

Fierde Sætning. Sættes at den ny Gield ikke skal forrentes af Staten eller Communen uden for Rente-Fondet og Afbetalings-Fondet, saa er $r \div t = 0$ og $t = r$. I dette Tilfælde har man $[(r \div 1) D + rF] \int \frac{1}{r^x}$

$=$

$= D + A \cdot \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot r \cdot \frac{1}{r^x}$, og $F \cdot \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot r = D + A \cdot \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot r$, som følger det ene af det andet. I det samme Tilfælde bliver Tidsrummet for Gieldens Ophævelse af den gamle og ny den samme, hvad enten man lader den sidste voxe frit for sig selv efter Rente-Foden r, eller om man afdrager en Deel af Renterne af de Afbetalings-Fond, som et Hielpe-Fond, paa det at den ny Gield kan nedsættes. Thi naar $t = r$, saa bliver (efter No. 15) $S = A \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot r \div F\left(\frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot r \div \frac{p^x - 1}{p - 1} \cdot p\right)$, og da er $F \cdot \frac{p^x - 1}{p - 1} \cdot p = D + A \cdot \frac{r^x \div 1}{1 \div 1} \cdot r \div F \cdot \frac{r^x - 1}{r \div 1} \cdot r + F \cdot \frac{p^x - 1}{p - 1} \cdot p$; hvoraf følger, at $F \cdot \frac{r^x \div 1}{r - 1} \cdot r = D + A \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot r$, som er Æqationen for det Tilfælde, da den ny Gield voxer frit for sig. Størrelsen af x bliver derfor den samme i begge.

44.

Femte Sætning. Sættes at Renterne af den ny Gield blive alle betalte udenfor de til den gamle Gield svarende Rente-Fond, og uden at fra det synkende Fond afdrage et Hielpe-Fond, saa er $t \div 1$ og $r \div t = r \div 1$. Den ny Gield er efter x Aar $= xA$, og denne disconteret er $x \cdot A \cdot \frac{1}{r^x}$. Men derimod ere nu de disconterede Renter, som udenfor afholdes, for det første Aar $\frac{r-1}{r} \cdot A$, for det andet Aar $2 \cdot (r \div 1) \cdot A \cdot \frac{1}{r^2}$, og for det xde Aar $x \cdot (r \div 1) \cdot A \cdot \frac{1}{r^x}$. Summen deraf $= A \cdot (r \div 1) \cdot \int \frac{x}{r^x}$. Man har altsaa $[(r \div 1) D + rF] \int \frac{1}{r^x} + (r \div 1) \cdot A \cdot \int \frac{x}{r^x} = D + A \cdot \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot \frac{r}{r^x}$, og $F \frac{(r^x - 1) r}{r - 1} = D + xA$; thi da $A \int \frac{x}{r^x} = A \cdot \frac{1}{r - 1}\left(r \int \frac{1}{r^x} \div \frac{x}{r^x}\right) = A \cdot \frac{1}{r \div 1} \cdot \frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot \frac{r}{r^x} \div A \cdot \frac{1}{r - 1} \cdot \frac{x}{r^x}$, saa er $D\left(1 \div \frac{1}{r^x}\right) + F \frac{(r^x - 1) r}{(r - 1) r^x} + A \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot \frac{r}{r^x} \div A \cdot \frac{x}{r^x} = D + A \frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot \frac{r}{r^x}$, og altsaa $F \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot \frac{r}{r^x} = D \cdot \frac{1}{r^x} + A \cdot \frac{x}{r^x}$, samt $F \cdot \frac{r^x - 1}{r - 1} \cdot r = D + pA$.

45.

45.

Siette Sætning. Sættes at Forrentningen af den ny Gield, som skeer udenfor de bestemte Rente- og Afbetalings-Fonds, skulde oprinde til en bestemt Størrelse, og ikke videre, saa at den Deel af Renter, som overskrider denne Størrelse, skulde afholdes af Afbetalings-Fondet; da findes den rede Værdie af denne paa følgende Maade: Den ny Gield bliver i Begyndelsen af et bestemt Aar (n) naar det Deficit for dette Aar er tillagt, og naar den er hidindtil voxen ved Rente-Foden t, $= A(1 + t + + t^{n \div 1}) = A \cdot \frac{t^n - 1}{t - 1}$ (No. 36), og Renternes disconterte Sum er $= (r \div t)\, A \left(\frac{1}{r} + \frac{1 + t}{r^2} + \frac{1 + t + t^2}{r^3} + + + \frac{1 + t + + t^{n \div 1}}{r^n}\right) = \frac{r - t}{t - 1} \cdot A \cdot \int \frac{t^n - 1}{r^n}$. Fra den Tid af, omendskiønt den ny Gield voxer endnu frem, maae den dertil svarende Rente-Summe, som udenfor betales, ikke forøges. Sættes den ny Gields Størrelse efter n Aar $. A . \frac{t^n - 1}{t - 1} = M$, saa har man den disconterte Værdie af alle de Renter, som udenfor deraf er udredet i n Aar,

$$= \frac{r \div t}{t \div 1} \cdot A \int \cdot \frac{t^n \div 1}{r^n} + r \div t \cdot \frac{t^n - 1}{t - 1} \cdot A \cdot \left(\int \frac{1}{r^x} \div \int \frac{1}{r^n}\right)$$

$$= A \cdot \frac{1}{r^n} \cdot \left[\frac{(r^n - 1)}{r - 1} \cdot r \div \frac{(t^n - 1)\,t}{t \div 1} + \overline{r \div t} \cdot \frac{t^n - 1}{t \div 1} \cdot \int \frac{1}{r^{x \div n}}\right]$$

$$= A \cdot \frac{1}{r^n}\left[\frac{(r^n - 1)r}{r - 1} \div \frac{(t^n - 1)t}{t - 1} + \frac{t^n \div 1}{t - 1} \cdot \overline{r \div t} \cdot \left(1 \div \frac{r^n}{r^x}\right)\frac{1}{r \div 1}\right]$$

$$= A \cdot \frac{1}{r^n}\left[\frac{(r^n - 1)r}{r \div 1} \div \frac{t^n - 1}{t - 1}\left(t \div \frac{r - t}{r - 1}\right) \div \frac{r - t}{r - 1} \cdot \frac{t^n - 1}{t - 1} \cdot \frac{r^n}{r^x}\right]$$

$$= A \cdot \frac{1}{r^n}\left[\frac{r^n - 1}{r - 1} \cdot r \div \frac{r}{r \div 1} \cdot (t^n \div 1) \div \frac{r \div t}{r \div 1} \cdot \frac{t^n \div 1}{t - 1} \cdot \frac{r^n}{r^x}\right]$$

$$= A \cdot \frac{r}{r \div 1}\left(1 \div \frac{t^n}{r^n}\right) \div \frac{r \div t}{r \div 1} \cdot M \cdot \frac{1}{r^x}$$

$$= \frac{1}{r - 1} \cdot \left(A \cdot \frac{r^n - t^n}{r^n} \cdot r \div \frac{r \div t}{r^x} \cdot M\right).$$

46.

46.

Sættes den forhen fundne Værdie udi den generale Æqvation (No. 41), saa har man $C + A\frac{r^x \div 1}{r \div 1} \cdot \frac{r}{r^x} = [(r \div 1)D + rF] \int \frac{1}{r^x} + \frac{1}{r \div 1}\left[A \cdot \frac{r^n \div t^n}{r^n} \cdot r \div \frac{r-t}{r^x} \cdot M\right]$; deraf faaes $\frac{1}{r^x} = \frac{r \cdot \left(F \div A\frac{t^n}{r^n}\right)}{(r-1)D + r(F \div A) + \overline{r-t} \cdot M}$. Ligeledes har man $F\frac{(r^x-1)r}{r-1} = D + A\frac{(r^x-1)r}{r-1} \div \frac{1}{r-1}\left(A\frac{r^n-t^n}{r^n} \cdot r \div \frac{r-t}{r^x} \cdot M\right)$, som er større end $D + A\frac{(t^x-1)t}{t-1}$, fordi Afbetalings-Fondet i dette Tilfælde maae afgive det som mangler til den, som udenfor bruges til at afholde Renterne til den over M oprindende ny Gield.

47.

Differencen mellem den rede Værdie af de disconterte Rente-Summer, som udenfor betales i det forrige Tilfælde (No. 41) naar de svarede til den hele ny Gield, hvor høit den end stiger, og i det sidste Tilfælde (No. 46) naar de svarede kun til M som et Maximum, er $= \frac{r-t}{t-1} \cdot A \int\left(\frac{t^x}{r^x} \div \frac{1}{r^x}\right) \div \frac{r-t}{t-1} \cdot A \int\left(\frac{t^n}{r^n} \div \frac{1}{r^n}\right) + \frac{r-t}{t-1} \cdot A\,(t^n \div 1) \int\left(\frac{1}{r^x} \div \frac{1}{r^n}\right) = \frac{r-t}{t-1} A\left[\left(\frac{t^{n+1}}{r^{n+1}} + + \frac{t^x}{r^x}\right) \div \left(\frac{1}{r^{n+1}} + + \frac{1}{r^x}\right)\right] \div \frac{r-t}{t-1} \cdot A \cdot (t^n \div 1)\left(\frac{1}{r^{n+1}} + + \frac{1}{r^x}\right) = \frac{r-t}{t-1} \cdot A\left(\frac{t^{n+1}}{r^{n+1}} + + \frac{t^x}{r^x}\right) \div \frac{r-t}{t-1} \cdot A \cdot t^n \cdot \left(\frac{1}{r^{n+1}} + + \frac{1}{r^x}\right) = \frac{r-t}{t-1} \cdot A\frac{t^n}{r^n}\left(\frac{t}{r} + + \frac{t^{x \div n}}{r^{x \div n}} \div \left(\frac{1}{r} + + \frac{1}{r^{x \div n}}\right)\right)$. Sættes $\frac{t}{r} = \frac{1}{q}$, saa er $\frac{1}{q} + + \frac{1}{q^{x \div n}} \div \frac{1}{r} + + \frac{1}{r^{x \div n}} = \frac{1}{q-1} \div \frac{1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^{x \div n}} \div \left(\frac{1}{r \div 1} \div \frac{1}{r \div 1} \cdot \frac{1}{r^{x \div n}}\right) = \frac{r \div q}{(r \div 1)(q \div 1)} \div \left(\frac{1}{q \div 1} \cdot \frac{1}{q^{x \div n}} \div \frac{1}{r \div 1} \cdot \frac{1}{r^{x \div n}}\right) = \frac{(t \div 1)r}{(r \div t)(r \div 1)} \div \frac{1}{r^{x \div n}}\left(\frac{t}{r \div t} \cdot t^{x \div n} \div \frac{1}{r \div 1}\right)$.

Derfor er Differencen $= \frac{r}{r \div 1} \cdot A \cdot \frac{t^n}{r^n} \div \frac{r \div t}{t \div 1} \cdot A\,\frac{t^n}{r^n} \cdot \frac{1}{r^{x \div n}}\left(\frac{t}{r \div t} \cdot t^{x \div n} \div \frac{1}{r \div 1}\right) = \frac{r}{r \div 1} \cdot A \cdot \frac{t^n}{r^n} \div \frac{t}{t \div 1} \cdot A \cdot \frac{t^x}{r^x} + \frac{r \div t}{t \div 1} \cdot A \cdot \frac{t^n}{r^x} \cdot \frac{1}{r \div 1}$.

48.

48.

Disse foregaaende Sætninger synes mig at indbefatte de Principer, hvorefter de praktiske Indretninger ved slige Fonds, hvorom er meldt No. 34, kunde bedømmes, saavidt Sagen henhører til Arithmetiken. Jeg vil kun tilføie et Exempel til No. 46, for at udfinde Tiden, der udfordres til den hele Gields Ophævelse, i Tilfælde at Renterne ikke skulde overgaae en vis Størrelse. Man har $\frac{1}{r^x} = \frac{r . \left(F \div A . \frac{t^n}{r^n}\right)}{(r-1) D + r (F \div A) + (r-t) M}$; nu være $F = A = 1$ og $t = 1.02$, tillige sættes, at naar den ny Gield har tiltaget til Begyndelsen af det 25de Aar, den udenfor at betalede Rente-Summer ikke forhøies. Dette forudsat er $n = 25$, og efter Tabellen $M = 1 + 31,03018 = 32,03018$. Deraf følger, at $\frac{1}{r^x} = 1.04 \left(\frac{1 - \frac{1,6406}{2,6658}}{0,04\,D + 0,02 \times 32,03018}\right) = \frac{0.4}{0,04\,D + 0,64}$. Antages nu $D = 384$, saa er $(r \div 1) D = 0,04\,D = 15,36$. Derfor er $\frac{1}{r^x} = \frac{0.4}{16} = 0.025$, og efter Tabellen $x = 94$ paa det nærmeste.

Regningens Rigtighed prøves paa følgende Maade: Da n er 25, og derfor i Slutningen af de foregaaende 24 Aar den gamle Debet af 384 er formindsket ved Afbetalings-Fondet (aarlig = 1) saameget, som kan beløbe sig til den Summe 40,646, saa bliver deraf tilbage i Begyndelsen af det 25de Aar $384 \div 40,646 = 343,354$. Dertil er den ny Gield kommen, der er oprunden i de 24 Aar efter 2 Procents-Fod, og derfor er voxen til 31,03018. Naar denne sidste Summe fra den Tid af voxer frit for sig selv efter den sædvanlige Rente-Fod, saa bliver samme i Udgangen af det 94de Aar $= 31,03018 \times r^{70} = 31,03018 \times 15,572$, som udgiør 483.202, Summen af denne tilligemed forrige 343.354 er = 826.556. Fra Begyndelsen af det 25de Aar kan den ny Gield gaae frit frem for sig selv efter Rente-Foden r, naar derimod Rente-Summen, som skal udenfor udredes af den hidindtil voxende ny Gield, henlægges til Afbetaling.

Da de aarlige Deficit antages ligestor med det oprindelige Aarlige af de synkende Fonds, saa kan det sidste anvendes til at hæve det første, og saaledes kommer deraf for Fremtiden ikke noget mere enten til Indtægt eller Udgivt.

Men ved Slutningen af det 25de Aar er Renten $(r \div t)\,M = 0{,}64$ i Exempelet efter foregaaende Regning, og som i Fremtiden bliver udredet udenfor, ligesom forhen er skeet. Deraf sees, at man til Afbetalingen af de forhen beregnede Summer 826.556 har 1) det Aarlige af de Renter, som i Fremtiden ligeledes skal udenfor betales, det er aarligen 0.6406. 2) Desuden et Overskud i Rente-Fondet til den gamle Gield, som man har vundet ved den afbetalte Summe 40,646, hvilket udgiør aarligen 1.626 paa det nærmeste. Og saaledes blive begge Annua tilsammen 2.2666. Men da begge disse Annua oppebæres den første Gang ved Slutningen af det 25de Aar, og den sidste Gang i Slutningen af det 94de Aar, saa er Beløbet deraf saa stor som Beløbet af et Annuum 2,266 efter 69 Aars Forløb, og som voxer efter 4 Procents Rente-Fod; naar dertil lægges endnu engang det samme ved Slutningen af det 94de Aar; altsaa udgiør det for de 69 Aar den Sum $2{,}266 \times 363{,}29 = 823.215$, som bliver betalt ved Enden af Tidsrummet. Denne Difference som findes endnu i Tallene, kommer deraf at x bliver noget mere end 94 Aar. Derfor maae den Multiplicator 363,29 ogsaa forøges, naar man vil regne saa nøie, hvilket jeg ikke har anseet for nødvendigt.

Fol-